

Fiche mémo coniques

1. Généralités sur les coniques	Définition générale	Définition par foyer et directrice
2. Ellipse	Rappel de cours	Définition bifocale
3. Parabole	Rappel de cours	Tracé animé
4. Hyperbole	Rappel de cours	Tracé animé

1. Définition générale des coniques.

2. Ellipse.

3. Parabole.

4. Hyperbole.

SI possible pour Hélène page HTML

(Rappel de cours) ou Définition générale

Définition générale des coniques.

Les coniques sont des courbes obtenues par l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.

- Si le plan passe par le centre du cône on obtient des coniques dites dégénérées ce sont : un couple de droites, une droite ou un point.
- Si le plan ne passe pas par le sommet du cône, on obtient suivant l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône :
 - une ellipse (un cercle si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône)
 - une parabole
 - une hyperbole.

Animation <http://pagesperso-orange.fr/Fradin.Patrick/TeXgraph/temp/forum/Coniques.swf>

Equation générale des coniques

On montre que l'équation générale de ces courbes dans un repère orthonormé est :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Avec a , b et c non tous nuls (sinon c'est une droite ou un le plan ou l'ensemble vide)

Si $b^2 - 4ac < 0$ la conique est une ellipse ou l'ensemble vide

Si $b^2 - 4ac = 0$ la conique est une parabole ou la réunion de deux droites parallèles

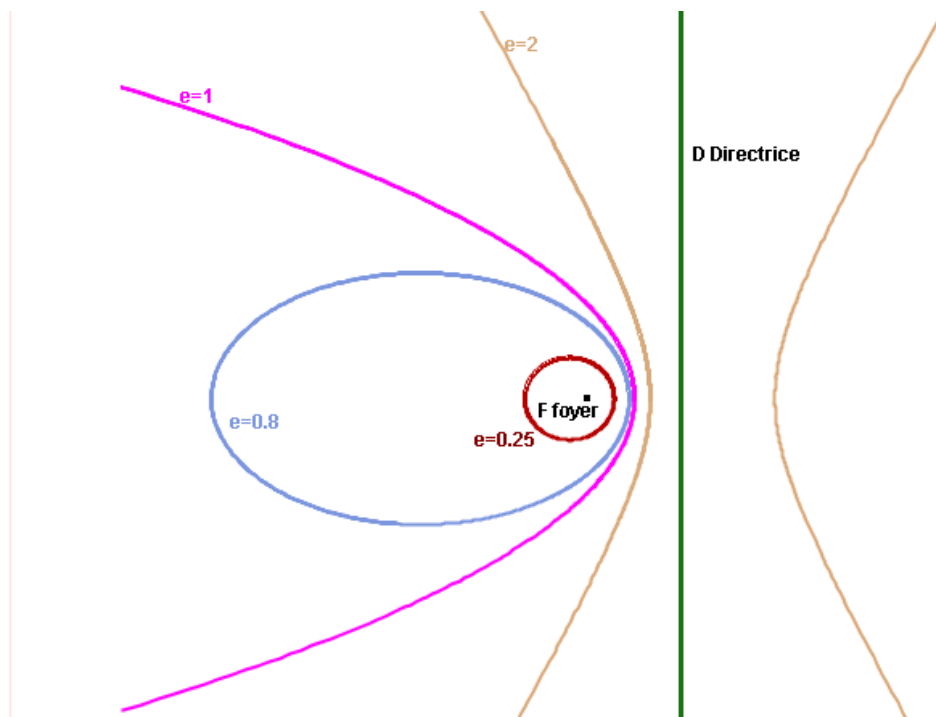
Si $b^2 - 4ac > 0$ la conique est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

(Définition par foyer et directrice)

Etant donnés une droite D , un point F n'appartenant pas à D et un nombre réel e , l'ensemble des points M tels que la distance de M à F soit e fois la distance de M à la droite D est :

- une ellipse si $e < 1$
- une parabole si $e = 1$
- une hyperbole si $e > 1$.

Le point F est appelé foyer et la droite D directrice.



Crédit <http://www.bibmath.net/>

Remarques

Réciproquement : toute parabole ou hyperbole ellipse (qui n'est pas un cercle), admet un foyer et une directrice associée.

Dans le cas de la parabole il y a une unique couple foyer/directrice

Dans le cas de l'ellipse (non cercle) et de l'hyperbole il y a deux couples foyer/directrice symétriques par rapport au centre de symétrie de la courbe.

(Rappel de cours)

Ellipse.

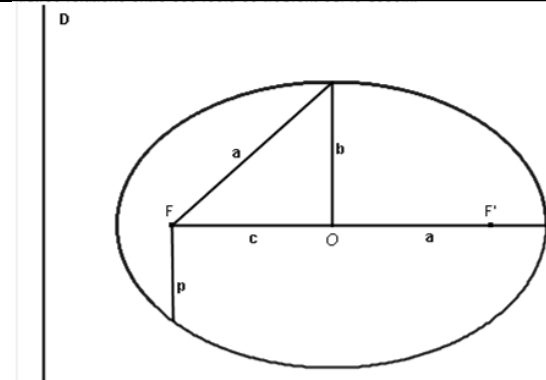
Equation réduite

L'équation réduite d'une ellipse est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'ellipse a deux axes de symétrie qui se coupent en O , centre de symétrie.

Elle est inscrite dans un rectangle de longueur $2a$ et de largeur $2b$.

Si $a=b$ c'est un cercle de rayon a et de centre O .



crédit <http://www.bibmath.net>

Si $a > b$ (dessin ci-contre) l'ellipse n'est pas un cercle elle a deux foyers F et F' définis par

$$OF = OF' = c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

L'excentricité de l'ellipse est $e = c/a$ c'est un nombre plus petit que 1.

D est la directrice associée au foyer F ; l'ellipse est l'ensemble des points M tels que $d(MF) = ed(M, D)$.

D a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$

Si $a < b$ le grand axe c'est-à-dire l'axe focal FF' est vertical et les directrices sont horizontales. Enfin, p est le paramètre de l'ellipse il vaut b^2/a

Equation paramétrique

Une équation paramétrique de l'ellipse est : $\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$

Equation en coordonnées polaires

Dans le repère défini par un foyer et l'axe focal $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

SI possible pour Hélène page HTML

Définition bifocale, l'ellipse du jardinier

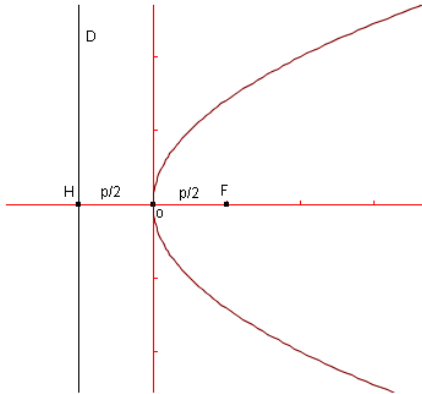
(Rappel de cours)

Parabole.

Equation réduite

L'équation réduite d'une parabole est de la forme $y^2 = 2px$, p est un nombre positif.

L'origine du repère est le sommet de la parabole.

 crédit http://www.bibmath.net	La parabole a un unique axe de symétrie : l'axe horizontal. La parabole a un unique foyer $F.(p/2 ; 0)$. La parabole a une unique directrice D d'équation $x = -\frac{p}{2}$. La parabole est l'ensemble des points situés à égale distance de F et de D.
Si l'équation réduite est $x^2 = 2py$ la parabole admet l'axe des y comme axe de symétrie et la directrice est horizontale.	

Equation paramétrique

Une équation paramétrique de l'ellipse est : $\begin{cases} x = t^2 p/2 \\ y = pt \end{cases}$

Equation en coordonnées polaires

Dans le repère défini par le foyer et l'axe de symétrie $r(\theta) = \frac{p}{1+\cos\theta}$

Si possible pour Hélène page HTML

Tracé animé de la parabole

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Coniques/Dessiner/Para_ficelle.html

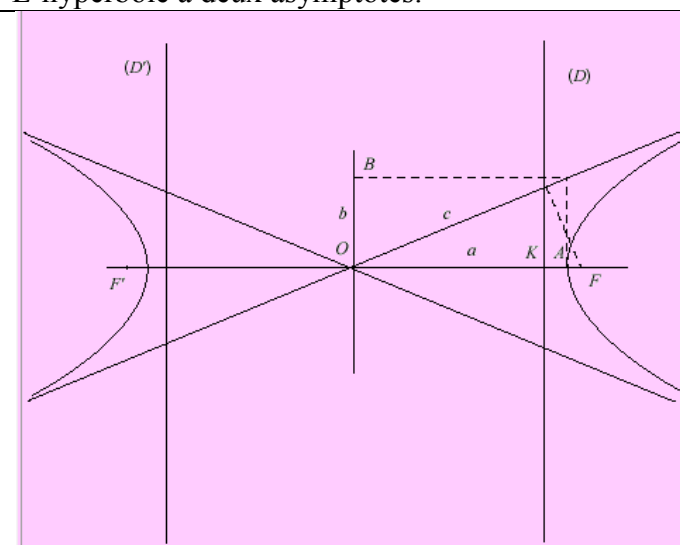
(Rappel de cours)

Hyperbole.

Equation réduite

L'équation réduite de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'hyperbole a deux axes de symétrie qui se coupent en O centre de symétrie
L'hyperbole a deux foyers F et F' et deux directrices D et D' et deux sommets.
L'hyperbole a deux asymptotes.



Crédit <http://www.mathcurve.com/>

Les foyers ont pour coordonnées $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
 D a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ (et D' $x = -\frac{a^2}{c}$)

L'excentricité de l'hyperbole est $e = c/a$
 c est un nombre plus grand que 1.

L'hyperbole est l'ensemble des points M tels que $d(MF) = ed(M, D)$.

Le sommet A a pour coordonnées $(a,0)$.

Les asymptotes ont pour équation
 $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Si $a=b$ l'hyperbole est équilatère et les asymptotes sont perpendiculaires.

Si l'équation réduite est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ l'axe focal FF' est vertical et les directrices sont horizontales.

Enfin, p est le paramètre de l'hyperbole il vaut b^2/a

Equation en coordonnées polaires

Dans le repère défini par un foyer et l'axe focal $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

Si possible pour Hélène page HTML

Tracé animé de l'hyperbole

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Coniques/Hyperbole/Hyper_cart.html