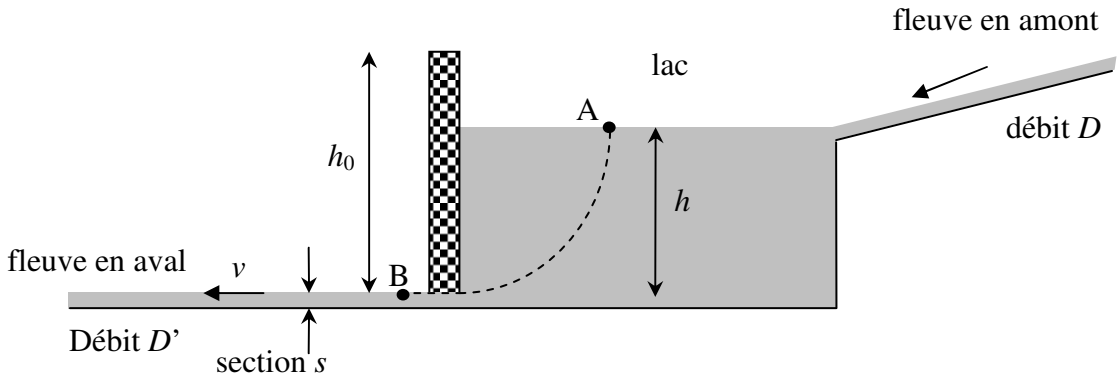
UNIVERSITE
PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

BGPC1 – UE LP104
Examen du 17 décembre 2007
Durée : 2h

Seules les calculatrices de type collège sont autorisées.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Les 3 exercices sont indépendants.

EXERCICE I - BARRAGE D'ASSOUAN ET REGULATION DU DEBIT DU NIL:

Le premier barrage sur le Nil a été construit en 1908. Il était principalement destiné à réguler les crues du fleuve. Le barrage actuel date de 1970. La hauteur du barrage est h_0 = 110 m (les hauteurs sont mesurées par rapport au point B, cf. schéma).
On appelle v la vitesse de l'eau à la sortie des vannes au pied du barrage. On note s la section du fleuve qui sort de ces vannes. On appelle D le débit volumique du fleuve en amont du barrage et D' le débit au pied du barrage (en aval). Enfin on note $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} la masse volumique de l'eau, et g = 10 m.s^{-2} l'accélération gravitationnelle. La pression atmosphérique est $P_0 = 10^5$ Pa. On supposera que l'eau est un fluide parfait incompressible et que l'écoulement est laminaire.



1) On suppose que le niveau d'eau dans le lac contenu par le barrage est constant.
   a) Quelle est alors la relation entre D et D' ?
   b) En déduire une relation entre D, v et s.

2) On note A et B deux points situés *en surface*, respectivement dans le lac et dans le fleuve en aval. Soit h la différence d'altitude entre ces deux points, autrement dit la hauteur d'eau dans le lac. On suppose toujours que le niveau d'eau reste constant ; l'écoulement est permanent.
   a) Quelle est alors la vitesse de l'eau au point A ? Quelles sont les pressions aux points A et B ? Justifier.
   b) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B. En déduire v en fonction de g et h.

3) Le débit moyen du fleuve en amont est : D_{moy}= 2800 m^3.s^{-1}. Les ingénieurs souhaitent que pour ce débit moyen, le niveau d'eau h_{moy} dans le lac s'équilibre à la moitié de la hauteur du barrage ($h_{moy} = h_0/2$). Exprimer, puis calculer numériquement, la section s des vannes qu'ils doivent construire pour réaliser cet objectif.

4) Lors de la crue, le débit du fleuve en amont monte à D_{max}= 8200 m^3.s^{-1}. Lors de la saison sèche

il descend à D_{min}= 550 $m^3.s^{-1}$. En utilisant la valeur de la section des vannes *s* calculée à la question précédente, calculer les valeurs h_{max} et h_{min} auxquelles s'équilibrerait le niveau d'eau dans le lac si le débit en amont restait stable aux valeurs D_{max} et D_{min}. On ne s'étonnera pas de trouver $h_{max} > h_0$.

5) Juste avant une crue, le niveau du lac est stable et vaut h_{moy}.
   a) Que vaut le débit du fleuve en aval du barrage juste avant la crue?
   b) Le débit en amont passe subitement à la valeur D_{max} (crue instantanée!). A cet instant, juste après l'arrivée de la crue, de combien de m^3 d'eau le volume du lac augmente-t-il à chaque seconde. Si la surface du lac est S = 3000 km^2, de combien de mètre le niveau d'eau augmente-t-il par seconde?
   c) On suppose que cette augmentation de niveau se fait à vitesse constante (c'est une approximation...). Combien de temps faut-il au niveau d'eau pour arriver à h_0. Exprimer le résultat en jours.
   d) Si la crue en amont dure 1 mois, que pouvez vous dire sur la régulation du débit du fleuve en aval du barrage?

EXERCICE II - EFFONDREMENT GRAVITATIONNEL DU SOLEIL.

A. Etude de l'interaction gravitationnelle entre deux masses

On s'intéresse tout d'abord à l'énergie potentielle de gravitation entre deux masses. Soit M = 100 kg une masse fixe située en O et m = 1 kg une masse située en A susceptible de se déplacer. On note r la distance OA entre les deux masses : $r = \left\| \overrightarrow{OA} \right\|$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de la masse m dans le champ de gravitation de la masse M :

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

avec $G = 6{,}67\,10^{-11}\,S.I. \approx \frac{2}{3}10^{-10}\,S.I.$ la constante de gravitation universelle.

1) a) Calculer la valeur de l'énergie potentielle en µJ (soit 10^{-6} J) pour les distances suivantes : r = 0,1 cm ; 0,2 cm ; 0,5 cm ; 1 cm ; 5 cm et 10 cm.
   b) Tracer l'allure de la fonction $E_p(r)$.

2) On suppose que la masse m est initialement maintenue à la distance r = 5 cm de la masse M. On lâche alors m sans vitesse initiale et on s'intéresse au mouvement de celle-ci en supposant qu'elle n'est soumise qu'à la force d'interaction gravitationnelle.
   a) Rappeler la définition de l'énergie mécanique $E_m(r)$ de la masse m.
   b) Comment varie cette énergie au cours du déplacement de la masse m ? Justifier.
   c) Donner la valeur de $E_m(r = 5\text{cm})$ et tracer la fonction $E_m(r)$ sur le graphe précédent.
   d) En déduire l'allure de la courbe représentant l'énergie cinétique $E_c(r)$. Expliquer brièvement comment vous obtenez cette courbe.
   e) Décrire alors le mouvement de la masse m après qu'on l'a lâchée.

B. Etude de l'interaction gravitationnelle propre du soleil. (les questions 1 et 2 sont indépendantes)

On admet que le soleil est une sphère uniforme de masse totale $M_S = 2\,10^{30}\,\text{kg}$ et de rayon $R = 7\,10^8\,\text{m}$. Dans la première question on cherche à calculer l'énergie potentielle de gravitation propre du soleil, c'est-à-dire l'énergie potentielle résultant de l'interaction entre les

différentes « poussières » constituant le soleil. Par convention, l'énergie potentielle est nulle lorsque ces poussières sont séparées à l'infini.

Dans la deuxième question on essaiera d'estimer la durée de vie du soleil.

1) On se propose de trouver l'expression de cette énergie de gravitation propre E_p par l'analyse dimensionnelle.

a) Quelle est la dimension d'une énergie ?

b) A partir de l'expression de l'énergie potentielle donnée dans la partie A. , déterminer la dimension de la constante de gravitation G.

c) On suppose alors que E_p a pour expression $E_p = K\, G^{\alpha} M_S^{\beta} R^{\gamma}$ avec K une constante sans dimension. Déterminer par l'analyse dimensionnelle les constantes α, β et γ.

d) On admettra que la constante sans dimension vaut $K = -\frac{3}{5}$. Donner alors l'expression de l'énergie potentielle E_p .

e) Calculer numériquement ΔE_p la variation d'énergie potentielle propre du soleil lorsque son rayon passe de R à $R/2$.

2) On cherche à estimer la durée de vie du soleil. Pour cela on admet que la puissance rayonnée est due entièrement à l'effondrement gravitationnel du soleil sur lui-même (perte d'énergie potentielle propre sans variation d'énergie cinétique).

a) On sait que la puissance rayonnée dans tout l'espace est environ 10^{26} Watt. En supposant que cette puissance rayonnée est constante dans le temps, calculer le temps T' nécessaire pour que le rayon du soleil passe de R à R/2.

b) Comparer la valeur obtenue à la durée estimée de 5 10^9 années. Commenter.

EXERCICE III - CAPACITE THERMIQUE D'UN GAZ :

Afin de mesurer la capacité thermique molaire d'un gaz, on place une mole de ce gaz dans une enceinte rigide et adiabatique. Initialement la température du gaz est de 20 °C et sa pression de $1{,}00.10^5$ Pa. Le gaz est assimilé à un gaz parfait. On suppose que la capacité thermique de l'enceinte est négligeable.

On introduit dans l'enceinte un morceau de cuivre de masse m = 50 g , de température 150 °C et de volume négligeable devant celui du gaz. Après quelques minutes le système atteint un nouvel état d'équilibre. La pression du gaz est montée à $1{,}27.10^5$ Pa.

1. Quelle est la température finale du système ?

2. Quelle est la capacité thermique molaire du gaz ?

3. S'agit-il d'un gaz monoatomique ou diatomique ?

On donne :

capacité thermique massique du cuivre : 385 J. K^{-1}. kg^{-1}

constante des gaz parfaits : R = 8,31 J. K^{-1}. mol^{-1}