UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

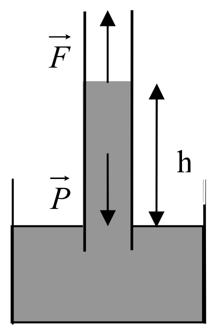
CONTROLE CONTINU N°1 – LP104 BGPC15
Le 3 novembre 2006 – Durée :1h15

Seules les calculatrices de type collège sont autorisées
Les téléphones portables doivent être fermés et rangés
Le sujet comporte 2 problèmes indépendants

PROBLEME I : tension superficielle et équations aux dimensions

L'énergie de surface E d'un liquide est proportionnelle à la surface S de son interface avec l'air. Le coefficient de proportionnalité σ est appelé coefficient de tension superficielle. On a donc : $E = \sigma.S$

1. Donner la dimension de l'énergie. En déduire la dimension de σ.
2. Donner la dimension d'une force. La force de tension de surface est proportionnelle à σ : quelle doit être la dimension du coefficient de proportionnalité A ? Justifier.
3. Si on plonge un capillaire (tube de très petit diamètre) dans une cuve contenant par exemple de l'eau, le liquide monte dans le capillaire jusqu'à une altitude h par rapport au niveau de liquide dans la cuve (voir dessin ci-dessous). L'expérience montre que cette hauteur est inversement proportionnelle au rayon r de la section du tube. Mais elle dépend de σ, de la masse volumique ϱ du liquide et de l'accélération de la pesanteur g. On a donc :
$$h = \frac{2}{r}\sigma^a \rho^b g^c$$
Après avoir donné les dimensions de ϱ et de g, calculer les puissances a, b et c. Donner ensuite l'expression finale de h (loi de Jurin).
4. Exprimer le volume puis le poids P de la colonne de liquide qui dépasse du niveau d'eau dans la cuve en fonction de r, h, ϱ et g.
5. Cette colonne, à l'équilibre, est donc soumise à 2 forces : son poids et la force de surface F définie au 2.
Déduire des conditions d'équilibre, l'expression du coefficient A en fonction de r. La dimension de cette expression est-elle cohérente avec ce qui a été trouvé au 2. ? Que représente cette expression de A pour la section du tube ?



PROBLEME II : de la terre à la lune.

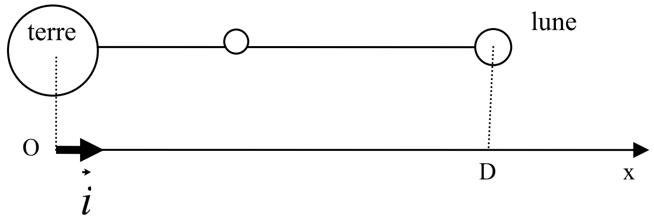
On veut envoyer un engin de masse *m* de la surface de la terre vers la lune. On supposera que la trajectoire est directe et qu'il n'y a pas de frottements durant tout le trajet.

On appellera *x* la distance entre le centre de la terre et le centre de l'engin.

Rappel : l'intensité de la force d'attraction universelle entre deux corps de masses respectives M et m est GMm/r^2 où r est la distance entre les centres des 2 masses.

Données numériques :

Masse de la terre : $M_t = 6.10^{24}$ *kg ; rayon de la terre* $R_t = 6,4.10^6 m$
Masse de la lune : $M_l = 7,3.10^{22} kg$ *; rayon de la lune* $R_l = 1,7.10^6 m$
Distance entre les centres de la terre et de la lune : $D = 3,8.10^8 m$
Masse de l'engin : $m = 3$ *tonnes*
Constante de gravitation $G = 6,7.10^{-11} Nm^2kg^{-2}$



A – Système terre-engin

1. Donner l'expression vectorielle de la force $\vec{F_t}$ qu'exerce la terre sur l'engin en fonction de x et des données du problème. La représenter sur un schéma. Comment varie cette force en fonction de x ?
2. Donner la relation qui existe entre une force conservative et son énergie potentielle. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $E_{pt}(x)$ de la force $\vec{F_t}$: on déterminera la constante d'intégration en prenant l'énergie potentielle nulle à l'infini. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
3. Faire la représentation graphique de cette énergie potentielle. Calculer $E_{pt}(R_t)$.
4. Expliquer pourquoi au cours du mouvement l'énergie mécanique est conservée. Donner son expression en fonction de x et de la vitesse v de l'engin.
5. En déduire l'expression de l'énergie cinétique initiale minimale nécessaire pour permettre à l'engin de sortir de l'attraction de la terre avec une vitesse nulle à l'infini : on expliquera au préalable pourquoi l'énergie mécanique du système est alors nulle. En déduire la valeur de la vitesse initiale minimale correspondante.

B – Système terre-engin-lune

1. Donner l'expression vectorielle de la force $\vec{F_l}$ qu'exerce la lune sur l'engin en fonction de x et des données du problème. La représenter sur un schéma. Comment varie cette force en fonction de x ?
2. Au cours de la trajectoire, il existe une position d'abscisse x_0 pour laquelle les deux forces, qui agissent sur l'engin, sont égales et opposées. Donner l'égalité qui permet de calculer cette abscisse, ne pas chercher à résoudre cette équation. L'équilibre est-il stable en ce point ? Justifier.
3. Donner le sens (et donc le signe) de la force totale appliquée à l'engin en fonction de x.
4. Calculer l'expression de l'énergie potentielle $E_{pl}(x)$ de la force $\vec{F_l}$: on déterminera la constante d'intégration en prenant l'énergie potentielle nulle à l'infini. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
5. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale du système terre-engin-lune. Dresser le tableau de variation de cette énergie potentielle uniquement en utilisant le résultat de la question 3. Donner l'allure de sa représentation graphique. Sachant que $x_0 = 3,4.10^8$ m, calculer l'énergie potentielle totale en x_0.
6. Calculer la valeur de l'énergie cinétique initiale minimale nécessaire pour envoyer un engin sur la lune : pour cela il suffit qu'il arrive en x_0 avec une vitesse nulle. Calculer la vitesse correspondante. Expliquer pourquoi cette vitesse est plus petite que celle obtenue au A – 5.

Corrigé

Tension superficielle

1. $[E] = ML^{-2}T^{-2}$; $[\sigma] = [E] / [S] = MT^{-2}$
2. $[F] = MLT^{-2}$; $F = A\sigma$ => $[A] = [F] / [\sigma] = L$
3. $[\varrho] = ML^{-3}$; $[g] = LT^{-2}$; $L = L^{-1}(MT^{-2})^a(ML^{-3})^b(LT^{-2})^c$ => $L = L^{-1-3b+c}M^{a+b}T^{-2a-2c}$

=> $a+b = 0$; $-2a-2c = 0$; $-1-3b+c = 1$ => $a = 1$; $b = -1$; $c = -1$ => $h = 2\sigma / (\varrho g r)$

4. volume : $\pi r^2 h$; $P = \pi r^2 h \varrho g$
5. $\pi r^2 h \varrho g = A\sigma$ => $A = 2\pi r$ soit le périmètre de la section du tube et $[A] = [r] = L$

A- système terre-lune

1. $\vec{F_t} = -\dfrac{GM_t m}{x^2}\vec{i}$; cette force décroît quand x croît.
2. $F_x = - dE_p/dx$ => $E_{pt} = - GM_t m/x$; constante d'intégration nulle ; homogénéite
3. courbe ; $E_{pt}(R_t) = -1{,}88.10^{11}$J
4. $E_m = (1/2)mv^2 + E_p$; cette énergie est conservée car il n'y a pas de frottements, les seules forces en jeu sont conservatives
5. A l'infini $E_{pt} = 0$ et $E_c = 0$ donc $E_m = 0$; en $x = R_t$: $E_m = E_{pt}(R_t) + E_{cmin}$ =>
   $E_{cmin} = 1{,}88.10^{11}$J => $v_{0min} = \sqrt{2E_{c\min}/m} = 11{,}2$ kms^{-1}

B – Système terre-engin-lune

1. $\vec{F_l} = \dfrac{GM_l m}{(D-x)^2}\vec{i}$; cette force croît quand x croît.
2. $\vec{F_t} + \vec{F_l} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{M_t}{x_0^2} = \dfrac{M_l}{(D-x_0)^2}$; L'équilibre n'est pas stable car de chaque côté de x_0 les forces tendent à éloigner l'engin de sa position d'équilibre.
3. Si $x < x_0$ la force totale est dirigée vers la terre et est donc négative
   Si $x > x_0$ la force totale est dirigée vers la lune et est donc positive.
4. $E_{pl} = - GM_l m/(D-x)$ constante d'intégration nulle ; homogénéité.
5. $E_p(x) = E_{pt} + E_{pl}$

x	R_t	x_0	$D-R_l$
F_x	-	0	+
dE_p/dx	+	0	-
E_p en joules	$\nearrow$ $-1{,}88.10^{11}$	$-3{,}9.10^9$	$\searrow$

6. $E_m = (1/2)mv_0^2 + E_p$; $E_{mmin} = E_{pmax} = - 3{,}9.10^9$ J ; $E_{cmin} = E_{mmin} - E_p(R_t) = 1{,}84.10^{11}$ J => $v_{0min} = \sqrt{2E_{c\min}/m} = 11{,}08$ kms^{-1} valeur légèrement plus petite que la précédente car l'énergie mécanique minimale est plus petite et à partir de x_0 l'engin est attiré par la lune.