UE PHYS104
Section BGPC15

Correction de l'examen du 2/11/2005

Exercice I :

1) a)

1) b) $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

1) c) $\cos(\vec{i},\vec{F}) = 3/\sqrt{34} = 0.514$, d'où $(i,j) = 1{,}03\ rad \approx \pi/3\ rad = 60$ degrés

1) d) L'expression du travail est : $W = \int_O^A \vec{F}.\vec{dl}$. Deux méthodes sont proposées pour calculer cette intégrale.

Première méthode : $W = \int_O^A \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^4 F_x dx + \int_0^0 F_y dy = 12 + 0 = 12$

Seconde méthode : $W = \int_O^A \vec{F}.\vec{dl} = \left|\vec{F}\right|\left|OA\right|\cos(\vec{F},OA) = \sqrt{34}\times 4\times 3/\sqrt{34} = 12$

2) a) E_0 et E ont la même dimension, donc r/r_0 et r/r_1 doivent être sans dimension.
Donc r_0 et r_1 ont la dimension d'une longueur.

2) b) La fonction atteint son minimum lorsque sa dérivée s'annule.
$E'_p(r) = E_0(-r_0/r^2 + 1/r_1)$, $E'_p(r_{\min}) = 0 \Rightarrow r_{\min} = \sqrt{r_0 r_1}$
r_0 et r_1 étant des longueurs, r_{min} est également une longueur.

2) c) On sait déjà que E_p possède un minimum (et il est unique). On constate aisément que :
$\lim_{r\to 0} Ep = \infty$, $\lim_{r\to\infty} Ep = \infty$

D'où la forme de la courbe.

Exercice II :

1) $[\rho] = [M][L]^{-3}$, $[E] = [M][L]^2[T]^{-2}$. Pour établir ces dimensions, le mieux est de revenir à des expressions connues. Par exemple la densité est une masse divisée par un volume et l'énergie cinétique est le produit d'une masse par une vitesse au carré.

2) Il faut que les dimensions du terme de gauche et du terme de droite soient identiques.
Compte-tenu des dimensions trouvées au 1), on obtient les 3 équations :

$[M] \Rightarrow \alpha + \beta = 0$,$[T] \Rightarrow -2\alpha + \gamma = 0$,$[L] \Rightarrow 2\alpha - 3\beta = 1$
$\Rightarrow \alpha = 1/5$,$\beta = -1/5$,$\gamma = 2/5$

Il est bien de faire une analyse rapide de la signification de ces coefficients. Ainsi le rayon augmente avec le temps et avec l'énergie de l'explosion ce qui correspond bien à ce que l'on attend physiquement. De même, le rayon décroît avec la densité du milieu extérieur ce qui signifie que l'explosion se propage plus difficilement en raison de l'inertie du milieu extérieur.

3) On exprime tout d'abord l'énergie en fonction des autres quantités.
$E \approx R^5 \rho t^{-2} = (60)^5 (0.95)(5 \times 10^{-4})^{-2} \approx 2.95 \times 10^{15} kgm^2 s^{-2}$ soit environ 750 tonnes de TNT.

Remarque : Il est important que le chiffre trouvé soit raisonnable. Ainsi trouver 10^{-4} tonnes de TNT, aurait dû sembler tout à fait impossible (beaucoup d'erreurs sont venus d'une confusion entre la puissance 5 et la puissance 1/5).

Exercice III :

1) cas a) : les forces qui agissent sont le poids (vertical) et la réaction de la jante (perpendiculaire à celle-ci donc radiale).

cas b) : le poids, la réaction du plan incliné (perpendiculaire à celui-ci), la force de frottement orientée vers le bas car la bille se déplace vers le haut).

2) On applique le principe fondamental de la dynamique à la bille : $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_T = m\vec{a}$. Après projection sur ($M_0M_1$), on obtient : $P_y + R_{ny} = 0 \Rightarrow |P|\cos\alpha = |R_n|$.

Remarque : il est important de bien préciser quel principe est appliqué à quel système.

3) cas a) : la réaction est normale à la trajectoire et le travail de cette force est nul, pour le poids, on a : $\int \vec{P}.\vec{dl} = -mgr \int_0^{\pi/2} \sin\alpha d\alpha = -mgr$.
Remarque : Noter le signe moins qui vient du fait que le travail est résistant et non moteur (si la bille descendait le travail du poids serait positif). On pouvait aussi trouver ce résultat en utilisant l'énergie potentielle de pesanteur qui vaut mgh et dont la variation est l'opposé du travail.

Cas b) : le travail de la réaction est nul. Le travail du poids est :
$\int \vec{P}.\vec{dl} = -mg\sin\alpha \int_{M_0}^{M_1} dl = -mgM_0M_1\sin\alpha = -mgh$. Le travail de la force de frottement est :
$\int \vec{R}_T.\vec{dl} = -R_T M_0 M_1 = -f_c mg\cos\alpha M_0 M_1$.
Noter là aussi le signe moins qui indique que le travail des forces de frottement est résistant.

4) La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures.

5) On applique le théorème de l'énergie cinétique à la bille entre les points M_0 et M_1.
Cas a) : seul le poids a un travail non nul. $\Delta E = 1/2m(V_1^2 - V_0^2) = -mgr$, d'où : $V_{0,a} = \sqrt{2gr}$
(V_1 est nulle car on cherche la vitesse suffisante pour que la bille atteigne le point M_1).

Cas b) : les travaux du poids et des frottements doivent être pris en compte.
$\Delta E = 1/2m(V_1^2 - V_0^2) = -mgh - f_c mgh \cot\alpha$, d'où : $V_{0,b} = \sqrt{2gh(1 + f_c \cot\alpha)}$.

Remarque : il est important de bien vérifier les dimensions des formules obtenues. Par ailleurs, il faut aussi s'assurer par des raisonnements simples que la formule ne prédit pas de comportements physiques aberrants. Ainsi un signe moins devant f_c dans la formule précédente conduirait à l'évidence à des contradictions. Par exemple en augmentant le coefficient de frottement, la vitesse V_0 pourrait s'annuler.

6) On a à l'évidence, $V_{0,b} > V_{0,a}$ (pour h=r). Ceci traduit le fait que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais que dans le cas b), les frottements dissipent de l'énergie. Il faut donc une vitesse plus élevée dans le cas b) que dans le cas a).