Corrigé de l'exercice 2

A. Étude en l'absence de frottements

1. Forces extérieures :
   - poids, vertical. $\vec{P} = mg \cdot (\sin(\theta)\,\vec{u}_x - \cos(\theta)\,\vec{u}_y)$; .... $\boxed{1}$
   - tension du ressort, dirigée selon $\pm\vec{u}_x$. $\vec{T} = -k \cdot (x - x_0)\,\vec{u}_x$; .... $\boxed{0{,}5}$
   - réaction du plan sur M, normale au plan car il n'y a pas de frottements, donc dirigée selon $+\vec{u}_y$. ... $\boxed{0{,}5}$
2. $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$.
   $a_x = 0$ en $x = x_1 \;\Rightarrow\; mg\sin(\theta) - k \cdot (x_1 - x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_0 + mg\sin(\theta)/k$. .... $\boxed{1}$
3. $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = -k\,\delta x\,\vec{u}_x$. .... $\boxed{1}$
   Si $\delta x \geq 0$ (resp. ≤ 0), $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ est dirigée selon $-\vec{u}_x$ (resp. $+\vec{u}_x$) et est attractive (resp. répulsive). .... $\boxed{0{,}5}$
   La force ramène toujours M vers x_1, donc l'équilibre est stable. .... $\boxed{0{,}5}$
4. $\delta W = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}x\,\vec{u}_x = (mg\sin(\theta) - k \cdot (x - x_0))\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_{\text{p}}$ avec $E_{\text{p}} = -mg\sin(\theta) \cdot (x - x_0) + \dfrac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2$.
   Note : accepter le résultat même si les étudiants utilisent les relations $E_{\text{p}}(\vec{P}) = mgz + C$ *et* $E_{\text{p}}(\vec{T}) = \dfrac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2$ *sans les démontrer, mais rajouter un bonus si le calcul est fait.*
   Expression de E_{p} .... $\boxed{1}$
   Calcul détaillé de E_{p} .... $\boxed{+1}$
   Graphique : il s'agit d'une parabole d'axe $\vec{u}_y$, tournée vers le haut. .... $\boxed{0{,}5}$
   La résultante est attractive à droite du sommet et répulsive à gauche. .... $\boxed{0{,}5}$
5. Équilibre pour un extremum de E_{p}, c.-à-d. $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x_1) = -mg\sin(\theta) + k \cdot (x1 - x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_0 + mg/k$. $\boxed{0{,}5}$
   L'équilibre est stable car il s'agit d'un minimum de E_{p} (cf. graphique ou bien $\dfrac{\mathrm{d}^2E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x^2}(x_1) = k > 0$). ...... $\boxed{0{,}5}$
6. **Question facultative.** L'énergie se conserve car les forces sont conservatives, voire ne travaillent pas (réaction purement normale en l'absence de frottements). .... $\boxed{+0{,}5}$
   $E_{\text{m}} = E_{\text{p}} + E_{\text{c}}$. En x_2, la vitesse est nulle, donc $E_{\text{c}} = 0$, d'où $E_{\text{m}} = -mg\sin(\theta) \cdot (x_2 - x_0) + \dfrac{1}{2}k \cdot (x_2 - x_0)^2$. $\boxed{+0{,}5}$
   $E_{\text{c}} = E_{\text{m}} - E_{\text{p}} = [-mg\sin(\theta) \cdot (x_2 - x_0) + \dfrac{1}{2}k \cdot (x_2 - x_0)^2] - [-mg\sin(\theta) \cdot (x - x_0) + \dfrac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2]$. .... $\boxed{+0{,}5}$
   Représentation de E_{m} : constante. .... $\boxed{+0{,}25}$
   Représentation de E_{c} : parabole d'axe $\vec{u}_y$, tournée vers le bas, nulle quand $E_{\text{p}}(x) = E_{\text{m}}$ et dont le sommet est à l'abscisse du sommet de E_{p}. .... $\boxed{+0{,}5}$
   L'énergie cinétique (et donc la vitesse) est maximale quand l'énergie potentielle est minimale, c.-à-d. $x_3 = x_1$. .... $\boxed{+0{,}25}$
   En x_4, $E_{\text{c}} = 0$, c.-à-d. $E_{\text{p}}(x_4) = E_{\text{m}} = E_{\text{p}}(x_2)$. On obtient $x_4 = 2x_1 - x_2$, c.-à-d. que x_4 est le symétrique de x_2 par rapport à x_1. .... $\boxed{+0{,}5}$
   Oscillation entre x_2 et x_4. .... $\boxed{+0{,}5}$

B. Étude en présence de frottements

1. $R_y = -mg\cos(\theta)$. .... $\boxed{1}$
2. Il faut que $mg\sin(\theta) - k \cdot (x - x_0) + R_x = 0$, c.-à-d. $R_x = k \cdot (x - x_1)$. .... $\boxed{1}$
   Si $x \geq x_1$ (resp. $\leq x_1$), R_x doit être dirigée selon $+\vec{u}_x$ (resp. $-\vec{u}_x$). .... $\boxed{0{,}5}$
3. $||R_x|| = k|x - x_1| \leq \mu mg\cos(\theta)$, donc $x \in [x_6, x_5]$ avec $x_6 = x_1 - \mu mg\cos(\theta)/k$ et $x_5 = x_1 + \mu mg\cos(\theta)/k$. $\boxed{1{,}5}$
4. **Question facultative.** Mouvement vers les x décroissants, donc $R_x = +\mu g\cos(\theta)$.
   $W_{x_7 \to x_8} = E_{\text{p}}(x_7) - E_{\text{p}}(x_8) + R_x \cdot (x_8 - x_7) = E_{\text{c}}(x_8) - E_{\text{c}}(x_7)$. .... $\boxed{+1}$
   $E_{\text{c}}(x_7) = 0$ et $E_{\text{c}}(x_8) = 0$, donc

$$[-mg\sin(\theta) \cdot (x_7 - x_0) + \frac{1}{2}k \cdot (x_7 - x_0)^2] - [-mg\sin(\theta) \cdot (x_8 - x_0) + \frac{1}{2}k \cdot (x_8 - x_0)^2] + \mu g\cos(\theta) \cdot (x_8 - x_7) = 0,$$

soit $x_8 = 2mg \cdot (\sin(\theta) + \mu\cos(\theta))/k - x_7 + 2x_0 = 2x_1 - x_7 + 2\mu mg\cos(\theta)/k$. .... $\boxed{+2}$
M reste immobile en x_8 si $x_8 \in [x_6, x_5]$, c.-à-d.

$$x_1 - \mu mg\cos(\theta)/k \leq 2x_1 - x_7 + 2\mu mg\cos(\theta)/k \leq x_1 + \mu mg\cos(\theta)/k,$$

soit

$$x_6 \leq x_7 \leq x_5 + 2\mu mg\cos(\theta)/k.$$

.... $\boxed{+1}$
Note : la condition $x_6 \leq x_7$ est évidemment vérifiée puisque $x_7 \geq x_5$ et que $x_5 \geq x_6$.