PHYS 104
Section 3
Première année
Premier semestre

Contrôle n°1

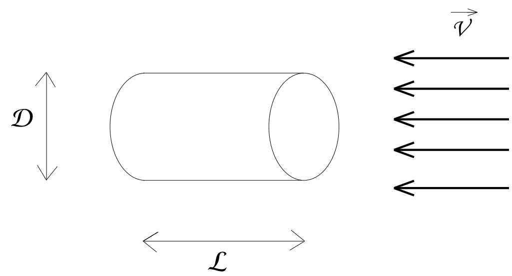
Lundi 15 novembre 2004

Durée : 1 heure 30.
Seules sont autorisées les calculatrices non programmables et sans écran graphique. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Doivent de même être rangés les documents de toute sorte. Les résultats doivent toujours être donnés sous forme littérale avant de procéder à l'application numérique lorsqu'elle est demandée. Enfin, les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1 : dimensions

Une maquette est une représentation d'un système physique que l'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions. **Toutes les quantités sans dimension correspondantes entre maquette et prototype doivent être égales** (alors que les termes ayant une dimension tels que la taille de la maquette et du prototype diffèrent nécessairement).

Un corps de largeur $\mathcal{D}$ et de longueur $\mathcal{L}$ est placé dans un fluide s'écoulant à la vitesse $\mathcal{V}$ uniforme. On sait qu'il peut se développer dans le sillage de ce corps des tourbillons de fréquence f qui peuvent être à l'origine de forces endommageant certaines structures. On admettra que les grandeurs pertinentes sont la fréquence f, les dimensions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ du corps, la vitesse $\mathcal{V}$ du fluide, sa masse volumique ρ et sa viscosité dynamique μ.



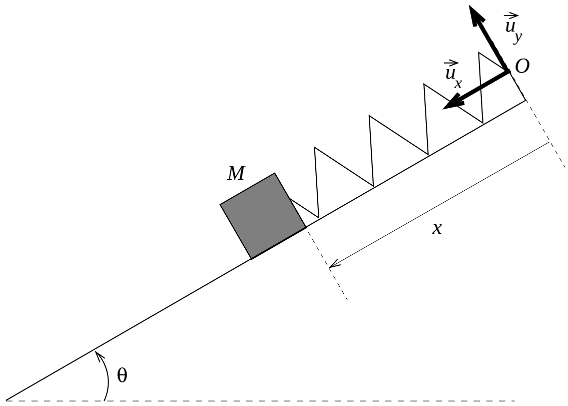
Prototype : le système étudié est un composant de la structure d'un pont de dimensions $\mathcal{D}_\mathrm{p} = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et $\mathcal{L}_\mathrm{p} = 30\,\mathrm{m}$. On veut connaître pour une vitesse de vent $\mathcal{V}_\mathrm{air} = 50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ la fréquence f qui peut être nuisible pour le pont. On prendra $\rho_\mathrm{air} = 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $\mu_\mathrm{air} = 2{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

Maquette : la fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ des tourbillons est mesurée à partir d'une maquette de dimension $\mathcal{D}_\mathrm{m} = 40\,\mathrm{mm}$ qui a été testée dans un courant d'eau ($\rho_\mathrm{eau} = 1{,}0\cdot 10^{3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $\mu_\mathrm{eau} = 1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-2}$).

1. Vérifier que $[\mu] = M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1}$ à partir de l'unité de μ_air.
2. Donner les dimensions de f, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$ et ρ.
3. Trois grandeurs indépendantes et sans dimension peuvent être formées à partir de f, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$, ρ et μ. Les écrire, sachant que la première ne fait intervenir que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$, la deuxième, uniquement f, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{V}$ et la troisième, uniquement $\mathcal{D}$, $\mathcal{V}$, ρ et μ.
4. On rappelle la remarque donnée en introduction : « toutes les quantités sans dimension correspondantes entre maquette et prototype doivent être égales ». Déduire de la question 3 (donner l'expression littérale puis l'application numérique) :
   (a) la dimension $\mathcal{L}_m$ de la maquette ;
   (b) la vitesse de l'eau dans la maquette ;
   (c) la fréquence du tourbillon sur le système.

Exercice 2 : dynamique

On se place dans le champ de pesanteur terrestre, caractérisé par son accélération $\overrightarrow{g}$. On considère un corps M, de masse m, posé sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale (figure ci-contre).



M est suspendu à un ressort parallèle au plan incliné, de constante de raideur k ($k > 0$) et de longueur au repos (à vide) x_0. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point O, fixe dans le référentiel terrestre.

Les vitesses et les accélérations seront exprimées par rapport à ce référentiel, supposé galiléen.

On utilisera le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, où $\vec{u}_x$ est un vecteur dirigé de O vers M et $\vec{u}_y$ un vecteur perpendiculaire au plan incliné et pointant vers le haut.

On notera x l'abscisse de M.

Il n'est pas nécessaire d'avoir répondu aux questions A.4 à A.6 pour traiter la partie B.

A. Étude en l'absence de frottements

On suppose dans cette partie qu'il n'y a pas de frottements entre le plan incliné et le corps.

1. Faire l'inventaire des forces extérieures exercées sur M. Reproduire le schéma ci-dessus et y représenter les forces exercées sur M. Donner leur expression vectorielle dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ ou, si leur intensité n'est pas connue *a priori*, leur direction et leur sens.

2. En projetant la relation fondamentale de la dynamique (c'est-à-dire la 2^{e} loi de Newton ou le théorème du centre d'inertie) sur l'axe x, donner l'abscisse x_1 pour laquelle M est à l'équilibre.

3. On suppose que M est écarté de δx par rapport à x_1. Calculer la résultante des forces extérieures (c'est-à-dire leur somme) en $x_1 + \delta x$. Préciser, selon le signe de δx, si la résultante attire M vers O ou si elle le repousse. L'équilibre est-il stable ou instable ?

4. Calculer l'énergie potentielle E_{p} de M en fonction de x. On convient que l'énergie potentielle est nulle en x_0.

   Représenter schématiquement sur un graphique E_{p} en fonction de x. On y indiquera les régions où la résultante des forces extérieures est attractive et celles où elle est répulsive.

5. À l'aide de l'énergie potentielle, retrouver la position d'équilibre x_1 déterminée à la question 2 et justifier le résultat de la question 3 sur la stabilité de l'équilibre.

6. **Question facultative.**

   On lâche M de $x_2 > x_1$ sans vitesse initiale. Justifier que l'énergie mécanique E_{m} se conserve et donner sa valeur. Calculer l'énergie cinétique E_{c} en fonction de x et représenter E_{m} et E_{c} sur le graphique de la question 4.

   Pour quelle valeur x_3 la vitesse est-elle maximale ? Calculer x_3.

   Pour quelle autre valeur x_4 la vitesse s'annule-t-elle à nouveau ? Calculer x_4. En déduire le mouvement de M.

B. Étude en présence de frottements

On suppose désormais qu'il y a des frottements entre le plan incliné et M. Ces frottements se traduisent par une composante $R_x\vec{u}_x$ de la réaction du plan sur M.

1. En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe y, donner l'expression de la composante $R_y\vec{u}_y$ de la réaction du plan sur M.

2. Grâce aux frottements (on parle alors de frottements statiques), M peut être à l'équilibre pour d'autres valeurs de x que la valeur x_1 trouvée dans la partie A.

   Préciser, selon la valeur de x par rapport à x_1, le signe que doit avoir R_x pour qu'un équilibre soit éventuellement possible en x.

3. Si M est à l'équilibre, R_x est relié à R_y par l'*inégalité* $|R_x| \leq \mu|R_y|$, où μ est une constante positive.

   Entre quelles valeurs x_5 et x_6 ($x_5 \geq x_6$) un équilibre est-il possible ?

4. **Question facultative.**

   On lâche M de $x_7 > x_5$. Dans ce cas, M n'est pas à l'équilibre. R_x est alors opposée au mouvement et reliée à R_y par l'*égalité* $|R_x| = \mu|R_y|$ (frottements cinétiques ou dynamiques).

   Déterminer la valeur x_8 de l'abscisse lorsque la vitesse de M s'annule (on pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou celui de l'énergie mécanique en présence de forces non conservatives).

   Déterminer, selon la valeur de x_7, si M va rester immobile en x_8.