PHYS 104
Section 3
Première année
Premier semestre

Contrôle n°2 : correction

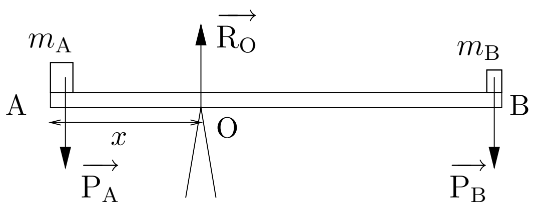
Vendredi 17 décembre 2004

I. La balançoire qui se prenait pour un plongeoir

Dans ce problème, on s'intéresse à une planche pouvant pivoter sur un axe. Dans un premier temps, on recherche sa position d'équilibre quand on pose deux masses à ses extrémités. Dans un second temps, on fait reposer une de ses extrémités, lestée par un poids, et on s'intéresse à son équilibre lorsqu'on place un poids en son autre extrémité.

Entre les deux, mon cœur balance...

On considère une planche horizontale, d'extrémités A et B, de longueur L et de masse négligeable, que l'on pose en équilibre sur un support situé en O (la planche peut donc tourner autour du point O). On dépose en A une masse m_A et en B une masse m_B.
On note x la distance OA.



Dans la suite, on considère le système $\mathcal{S}$ constitué de la planche et des masses m_A et m_B.

1. Représentez sur un dessin les forces s'exerçant sur le système $\mathcal{S}$. Exprimez la distance OB en fonction de L et x.

Réponse:

Les forces s'exerçant sur le système $\mathcal{S}$ sont les poids des masses m_A et m_B et la réaction du support en O. Les forces de réaction de la planche sur les masses m_A et m_B n'interviennent pas puisque ce sont des forces intérieures. Si on tenait à en tenir compte, il fallait alors également tenir compte des forces exercées par les masses sur la planche qui compensaient exactement les précédentes.

Par ailleurs, on a :

$$OB = AB - OA = L - x$$

2. On suppose que $\mathcal{S}$ est à l'équilibre :

(a) Écrivez le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) pour le système $\mathcal{S}$.

Réponse:

Comme $\mathcal{S}$ est à l'équilibre :

$$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{R_O} = \overrightarrow{0}$$

(b) Exprimez les moments des différentes forces s'exerçant sur $\mathcal{S}$ par rapport au point O. Déduisez-en la relation d'équilibre du système $\mathcal{S}$ relative aux moments.

Réponse:
Les moments des forces s'expriment :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P_A}) &= \|\overrightarrow{P_A}\|\,\|\overrightarrow{OA}\|\sin+\frac{\pi}{2} = +x\,m_A\,g \\
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P_B}) &= \|\overrightarrow{P_B}\|\,\|\overrightarrow{OB}\|\sin-\frac{\pi}{2} = -(L-x)\,m_B\,g \\
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{R_O}) &= \|\overrightarrow{R_O}\|\,\|\overrightarrow{OO}\| = 0
\end{aligned}$$

La relation d'équilibre pour les moments s'écrit donc :

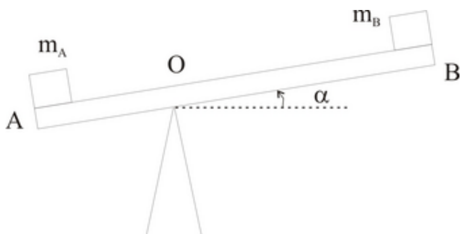
$$x\,m_A\,g - (L-x)\,m_B\,g = 0$$

(c) Quelle valeur doit avoir x pour que l'on soit effectivement à l'équilibre ?

Réponse:
De l'équation précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}
x\,m_A - (L-x)\,m_B &= 0 \\
x\,(m_A+m_B) - L\,m_B &= 0 \\
x &= \frac{m_B}{m_A+m_B}L
\end{aligned}$$

3. On incline à présent la planche d'un angle α par rapport à l'horizontale et on suppose à nouveau que l'on est à l'équilibre (les masses m_1 et m_2 sont rigidement fixées à la planche et ne peuvent donc pas glisser).



(a) Récrivez le principe fondamental de la dynamique pour $\mathcal{S}$ et projetez-le sur une base de votre choix : quelle doit être l'orientation de $\overrightarrow{R_O}$, la réaction du support en O, pour que l'équilibre soit possible ? Qu'en déduisez-vous ?

Réponse:
On a toujours :

$$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{R_O} = \overrightarrow{0}$$

On projette cette relation sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ constituée d'un vecteur $\overrightarrow{e_x}$ horizontal dirigé vers la droite et d'un vecteur $\overrightarrow{e_z}$ vertical ascendant. On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
-m_A\,g - m_B\,g + R_{Oz} &= 0 \\
R_{Ox} &= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{R_O}$ est vertical, orienté vers le haut. Ceci implique en particulier que $\overrightarrow{R_O}$ n'est pas perpendiculaire à la planche comme le sont les réactions en l'absence de frottement. Donc, pour que l'équilibre puisse exister, il faut qu'il y ait des frottements en O (sinon la planche glisse[1])

(b) Récrivez la condition d'équilibre sur les moments des forces et donnez l'expression de x pour qu'on soit effectivement à l'équilibre : l'expression de x a-t-elle changé ?

Réponse:
On a désormais les moments :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P_A}) &= \|\overrightarrow{P_A}\|\,\|\overrightarrow{OA}\|\sin(+\frac{\pi}{2}-\alpha) = +x\,m_A\,g\,\cos\alpha \\
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P_B}) &= \|\overrightarrow{P_B}\|\,\|\overrightarrow{OB}\|\sin(-\frac{\pi}{2}+\alpha) = -(L-x)\,m_B\,g\,\cos\alpha \\
\mathcal{M}_O(\overrightarrow{R_O}) &= \|\overrightarrow{R_O}\|\,\|\overrightarrow{OO}\| = 0
\end{aligned}
$$

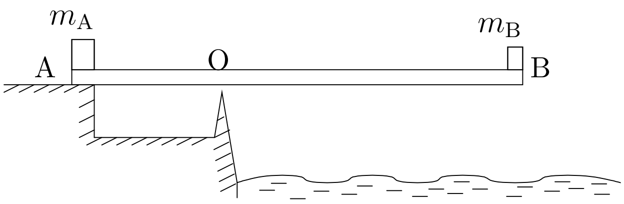
La relation d'équilibre nous donne alors :

$$
\begin{aligned}
x\,m_A\,g\,\cos\alpha - (L-x)\,m_B\,g\,\cos\alpha &= 0 \\
x\,m_A - (L-x)\,m_B &= 0 \\
x &= \frac{m_B}{m_A+m_B}L
\end{aligned}
$$

Le point d'équilibre n'a pas changé (c'est le centre de gravité du système).

Plouf ?

On fait à présent reposer la planche sur un support en A, ajusté de telle sorte que la planche soit horizontale (comme représenté sur le dessin). On dépose à nouveau les masses m_A et m_B et on considère la distance x fixée.



4. Du fait du nouveau support en A, une réaction $\overrightarrow{R_A}$ vient s'ajouter aux forces identifiées dans la partie précédente. Justifiez que si la planche est à l'équilibre, la composante verticale R_{Az} est nécessairement positive ou nulle.

Réponse:
$\overrightarrow{R_A}$ est une force de "réaction", c'est à dire qu'elle apparaît en réaction à la force $\overrightarrow{F}_{p/s}$ que la planche exerce sur le support. Comme la planche ne peut qu'appuyer sur le support (elle ne peut pas le tirer !), $\overrightarrow{F}_{p/s}$ est forcément orientée vers le bas. Par conséquent, $\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{F}_{p/s}$ est forcément orientée vers le haut : R_{Az} ne peut être que positive. (Notez bien : si R_{Az} était négative, cela voudrait dire ici que le support pourrait tirer sur la planche, ce qui serait le cas si on avait lié le support et la planche, par exemple à l'aide d'un crochet).

[1]Faites l'expérience ! Posez une règle en équilibre sur un stylo (pas de frottement) et inclinez-la : elle glisse. Faites de même sur votre doigt (présence de frottements) : elle ne glisse pas.

5. On suppose que $\overrightarrow{R_A}$ n'a pas de composante horizontale ($R_{Ax} = 0$). Écrivez le moment de $\overrightarrow{R_A}$ par rapport à O et la condition d'équilibre sur les moments.

Réponse:

$$\mathcal{M}_O(\overrightarrow{R_A}) = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{R_A}\| \sin -\frac{\pi}{2} = -x\, R_{Az}$$

6. De la relation précédente et de la condition $R_{Az} \geq 0$ si on est à l'équilibre, déduisez la masse maximale $m_{B\,max}$ que l'on peut déposer en B sans que la planche bascule exprimée en fonction de x, L et m_A.

Réponse:
La relation d'équilibre relative aux moments s'écrit :

$$x\, m_A\, g - (L-x)\, m_B\, g - x\, R_{Az} = 0$$

Soit :

$$R_{Az} = m_A\, g - m_B\, g\, \frac{L-x}{x}$$

De la condition $R_{Az} \geq 0$, on déduit alors :

$$m_A\, g - m_B\, g\, \frac{L-x}{x} \geq 0$$

ce qui nous donne finalement :

$$m_B \leq \frac{x}{L-x} m_A = m_{B\,max}$$

La droite courbée !

Sous l'action des forces en A, B et O, la planche se courbe. Elle se comporte alors comme un ressort de raideur k.

7. Pour un ressort de longueur au repos l_0 et de longueur étiré l, rappelez l'expression de la force de rappel du ressort et l'énergie potentielle associée.

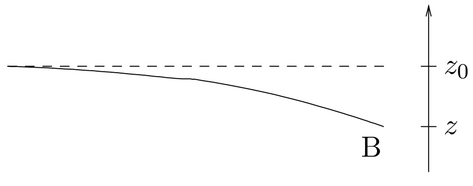
Réponse:
La force du rappel d'un ressort dirigé suivant $\overrightarrow{e_l}$ est

$$\overrightarrow{T} = -k(l-l_0)\, \overrightarrow{e_l}$$

L'énergie potentielle associée est

$$E_{p\,\overrightarrow{T}} = \frac{1}{2}\, k\, (l-l_0)^2 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

On repère l'extrémité B du ressort par son altitude z. Lorsqu'il n'y a pas de masse en B, la planche est bien droite et horizontale et l'altitude de B est alors z_0.



8. En tenant compte de fait que la planche se comporte comme un ressort de raideur k, donnez l'expression de la force que la planche exerce sur la masse m_B lorsque B est à l'altitude z.

Réponse:

Par analogie avec un ressort, et en prenant un vecteur de base $\overrightarrow{e_z}$ vertical et dirigé vers le haut, on obtient

$$\overrightarrow{T} = -k\,(z - z_0)\overrightarrow{e_z}$$

Cette force est bien dirigée vers le haut lorsque z est plus petit que z_0, donc lorsque la planche est courbée vers le bas. Elle fait donc bien office de force de rappel.

9. On considère à présent comme système la masse m_B :

(a) Écrivez le principe fondamental de la dynamique pour la masse m_B.

Réponse:

Les forces agissant sur la masse m_B sont son poids $\overrightarrow{P_B}$ et la force $\overrightarrow{T}$ exercée par la planche. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc :

$$\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{T} = m_B\overrightarrow{a_B}$$

(b) Déduisez-en l'altitude à laquelle se trouve B lorsque la masse m_B est au repos (système à l'équilibre).

Réponse:

À l'équilibre, $\overrightarrow{a_B}$ est nulle. En projetant l'équation précédente sur $\overrightarrow{e_z}$, on obtient donc :

$$-m_B\,g - k\,(z - z_0) = 0$$

dont on déduit

$$z = z_0 - \frac{m_B\,g}{k}$$

L'altitude d'équilibre est donc plus faible que z_0, ce qui correspond bien à une planche courbée vers le bas.

(c) Donnez alors l'altitude de repos de B lorsqu'on dépose en B la masse critique $m_{B\,max}$.

Réponse:

En combinant les réponses des questions précédentes, on trouve :

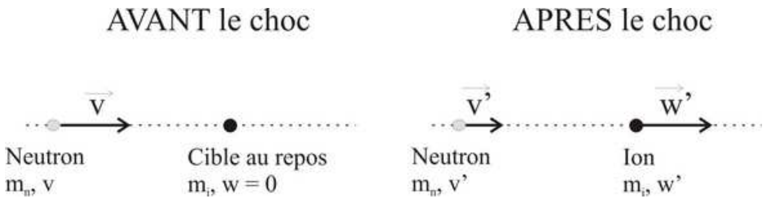
$$z_{max} = z_0 - \frac{x}{L-x}\,\frac{m_A\,g}{k}$$

II. La masse du neutron

La vitesse et la masse des neutrons ne peuvent être mesurées directement, comme il est possible de le faire avec les particules chargées en observant l'effet d'un champ électrostatique sur leur trajectoire. Néanmoins, dans les années 1930, Chadwick réalisa une expérience pour évaluer la masse du neutron.

Choc frontal élastique de deux particules

On dirige un faisceau de neutrons sur une cible constituée d'atomes dont on connaît les masses. La collision d'un neutron avec un atome de la cible arrache cet atome et le projette sous sa forme ionique, dont il possible de mesurer la vitesse.



On note v et v' la vitesse du neutron avant et après le choc, w et w' celle de l'atome arraché à la cible, m_n la masse du neutron et m_i celle de l'atome ionisé. On suppose que l'atome cible est initialement au repos ($w = 0$) et que le choc est élastique.

1. Écrivez les relations de conservation sur l'impulsion et l'énergie

Réponse:
La relation de conservation de l'impulsion, projetée sur l'axe de l'expérience, donne

$$m_n\, v = m_n\, v' + m_i\, w'$$

Le choc étant élastique, on peut également écrire la relation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_n v^2 = \frac{1}{2} m_n v'^2 + \frac{1}{2} m_i w'^2$$

2. En utilisant les équations précédentes, exprimez w' en fonction de v, m_n et m_i.

Indication: On pourra utiliser la relation sur la conservation de l'impulsion pour exprimer v' en fonction de w', v, m_n et m_i puis réinjecter cette expression dans la relation sur la conservation de l'énergie pour obtenir w' en fonction de v, m_n et m_i.

Réponse:
La relation sur la conservation de l'impulsion nous donne :

$$v' = v - \frac{m_i}{m_n} w'$$

En réinjectant cette expression dans la relation sur la conservation de l'énergie cinétique et en simplifiant, on trouve alors

$$0 = -2\, m_i\, v\, w' + \frac{m_i^2}{m_n} w'^2 + m_i w'^2$$

En éliminant la solution non physique $w' = 0$ (elle correspond au cas où les particules se traverseraient sans se voir), on obtient

$$0 = -2\, v + \left(1 + \frac{m_i}{m_n}\right) w'$$

et donc :

$$w' = \frac{2\, m_n}{m_n + m_i} v$$

Masse du neutron

Comme il a été dit précédemment, on ne peut pas mesurer la vitesse d'un neutron, on ne peut donc pas connaître v. On peut en revanche s'assurer que, d'une expéri/ence à l'autre, v ait à peu près la même valeur. En reproduisant l'expérience précédente pour deux types d'atomes cibles différents dont les masses sont bien connues, on peut alors éliminer v entre les équations obtenues.

3. Appliquez le résultat de la partie précédente au cas d'une cible d'atomes d'hydrogène (ion H^+) de masse $m_i = m_p$ et donnez $w' = w'_p$ en fonction de v, m_n et m_p.

Réponse:

$$w'_p = \frac{2\,m_n}{m_n + m_p} v$$

4. Même question dans le cas d'une cible d'azote (masse m_N, vitesse d'éjection w'_N).

Réponse:

$$w'_N = \frac{2\,m_n}{m_n + m_N} v$$

5. Déduisez-en le rapport w'_p/w'_N en fonction des rapports m_n/m_p et m_N/m_p, puis le rapport m_n/m_p en fonction de w'_p/w'_N et m_N/m_p.

Réponse:
En prenant le rapport des deux résultats précédents, on a

$$\frac{w'_p}{w'_N} = \frac{m_n + m_N}{m_n + m_p}$$

En factorisant au numérateur et au dénominateur par m_p, on obtient la première expression demandée (en fonction des bons paramètres) :

$$\frac{w'_p}{w'_N} = \frac{\frac{m_n}{m_p} + \frac{m_N}{m_p}}{\frac{m_n}{m_p} + 1}$$

De cette expression, on peut ensuite extraire la seconde formule demandée :

$$\begin{aligned}
\frac{m_n}{m_p} + \frac{m_N}{m_p} &= \frac{w'_p}{w'_N}\left(1 + \frac{m_n}{m_p}\right) \\
\frac{m_n}{m_p}\left(1 - \frac{w'_p}{w'_N}\right) &= \frac{w'_p}{w'_N} - \frac{m_N}{m_p} \\
\frac{m_n}{m_p} &= \frac{\frac{w'_p}{w'_N} - \frac{m_N}{m_p}}{1 - \frac{w'_p}{w'_N}}
\end{aligned}$$

6. Évaluez numériquement m_n/m_p
Données numériques:

$$\frac{m_N}{m_p} = 14 \qquad \frac{w'_p}{w'_N} = 7,5$$

Réponse:

$$\frac{m_n}{m_p} = \frac{7,5 - 14}{1 - 7,5} = 1$$

On obtient un résultat "bien connu" qui est que neutron et proton ont la même masse.

III. Thermodynamique

Une enceinte de volume $V = 30$ L est divisée en trois compartiments de même volume par des parois escamotables. Toutes les parois extérieures et intermédiaires sont des isolants thermiques parfaits.

Compartiment 1	Compartiment 2	Compartiment 3
Argon	Vide	Diazote
n_1 moles		n_3 moles
T_1		T_3

Le compartiment de gauche (1) contient n_1 moles d'argon à la température T_1, celui de droite (3) contient n_3 moles de diazote (N_2) à la température T_3, le compartiment central (2) est vide de tout gaz.

Tous les gaz seront considérés comme des gaz parfaits.

Mélangeons, mélangeons...

1. Exprimez les énergies internes initiales de chaque gaz, puis du système constitué par l'ensemble des deux gaz.

Réponse:

Le gaz d'argon est un gaz parfait monoatomique, il a donc pour énergie interne

$$E_1 = \frac{3}{2} n_1 \, R T_1$$

En revanche, le gaz de diazote est un gaz parfait diatomique, d'où une énergie interne

$$E_3 = \frac{5}{2} n_3 \, R T_3$$

Enfin, l'énergie interne du système constitué de l'ensemble des deux gaz a pour énergie interne

$$E_i = E_1 + E_3 = \frac{3}{2} n_1 \, R T_1 + \frac{5}{2} n_3 \, R T_3$$

2. On enlève la paroi séparant les compartiments 1 et 2 pour faire un compartiment unique. Déterminez le volume, la pression et la température du gaz dans ce nouveau compartiment.

Réponse:

Le volume final est la somme des volumes initiaux :

$$V_{1+2} = V_1 + V_2 = 2V_1 = \frac{2}{3} V = 20 \text{ L}$$

Le gaz (1) est à la fin à la température T_{1+2}. Il a donc une énergie interne

$$E_{1+2} = \frac{3}{2} n_1 \, R T_{1+2}$$

L'évolution étant adiabatique ($Q = 0$) et sans travail de force extérieure ($W = O$), le premier principe donne :

$$E_{1+2} - E_1 = 0$$

dont on déduit immédiatement

$$T_{1+2} = T_1$$

Enfin, le gaz étant un gaz parfait, on a :

$$p_{1+2}\,V_{1+2} = n_1\,R\,T_{1+2} = n_1\,R\,T_1 = p_1\,V_1$$

et donc

$$p_{1+2} = \frac{V_1}{V_{1+2}} p_1 = \frac{p_1}{2}$$

3. On supprime maintenant la paroi séparant le compartiment contenant l'argon (1 + 2) et le compartiment contenant le diazote (3), les gaz se mélangent. Donnez l'expression de l'énergie interne finale du mélange en fonction de la température finale T_f. En déduire l'expression de T_f en fonction de n_1, n_3, T_1 et T_3.

Réponse:

L'énergie interne finale s'exprime comme la somme des énergies internes des deux gaz à la température T_f :

$$E_f = \frac{3}{2}\,n_1\,R\,T_f + \frac{5}{2}\,n_3\,R\,T_f = \left(\frac{3}{2}\,n_1 + \frac{5}{2}\,n_3\right)\,R\,T_f$$

À nouveau, l'évolution se faisant sans travail de force extérieure et sans transfert thermique, le premier principe de la thermodynamique donne

$$E_f - E_i = 0$$

On en déduit immédiatement :

$$T_f = \frac{3\,n_1\,T_1 + 5\,n_3\,T_3}{3\,n_1 + 5n_3}$$

4. *Application numérique:*
$n_1 = n_3 = 1$ mol, $T_1 = 293$ K, $T_3 = 380$ K
Calculez T_f.

Réponse:

$$T_f = \frac{3 * 293 + 5 * 380}{3 + 8} = 347 \text{ K}$$

5. Déterminez la pression finale p_f qui règne dans l'enceinte, ainsi que la pression partielle finale de chacun des gaz.

Réponse:

Les gaz étant des gaz parfaits, on a :

$$\begin{aligned} p_f\,V &= (n_1 + n_3)\,R\,T_f \\ p_f &= \frac{n_1 + n_3}{V} R\,T_f = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

De même, pour les pressions partielles (pression qu'aurait le gaz s'il occupait seul le même volume à la même température), on trouve :

$$\begin{aligned} p_{p1} &= \frac{n_1}{V} R\,T_f = 0,95 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ p_{p3} &= \frac{n_3}{V} R\,T_f = 0,95 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Mélange quasi-statique

On repart maintenant de la situation initiale. On fait communiquer par un fin tuyau les compartiments 1 et 2. À la fin de cette transformation, le système constitué par le gaz 1 est donc dans l'état suivant : n_{1f} moles dans le compartiment 1 (volume : $V/3$, pression : p_{1f}, température : T_{1f}) et n_{2f} moles dans le compartiment 2 (volume : $V/3$, pression : p_{2f}, température : T_{2f})

6. En utilisant la conservation du nombre total de moles, trouvez une relation entre p_{1f}, p_{2f}, T_{1f}, T_{2f} d'une part, p_1, T_1 d'autre part.

Réponse:
La conservation du nombre total de moles s'écrit

$$n_{1f} + n_{2f} = n_1$$

Or, pour chaque gaz parfait, on a la relation

$$n_i = \frac{p_i\, V_i}{R\, T_i}$$

La relation sur la conservation du nombre total de moles devient donc :

$$\frac{p_{1f}\, V_1}{R\, T_{1f}} + \frac{p_{2f}\, V_2}{R\, T_{2f}} = \frac{p_1\, V_1}{R\, T_1}$$

Comme les volumes V_1 et V_2 sont égaux, on peut simplifier la relation précédente en

$$\frac{p_{1f}}{T_{1f}} + \frac{p_{2f}}{T_{2f}} = \frac{p_1}{T_1}$$

7. Trouvez la relation existant entre les pressions finales p_{1f} et p_{2f}.

Réponse:
Une propriété des gaz est que dans un cas comme celui étudié ici, le gaz de la première enceinte continue à s'écouler dans la seconde enceinte jusqu'à ce que les pressions dans les deux enceintes deviennent égales. À l'équilibre, on a donc finalement :

$$p_{1f} = p_{2f}$$

8. Calculez l'énergie interne finale de l'ensemble du gaz 1. Déduisez-en la variation d'énergie interne pour l'ensemble du gaz. Donnez alors les valeurs de p_{1f} et de p_{2f} .

Réponse:
Comme précédemment, l'énergie interne finale du gaz est la somme des énergies internes des gaz qui le composent :

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{3}{2} n_{1f}\, R\, T_{1f} + \frac{3}{2} n_{2f}\, R\, T_{2f} \\ &= \frac{3}{2} R\, (n_{1f}\, T_{1f} + n_{2f}\, T_{2f}) \\ &= \frac{3}{2}\, (p_{1f}\, V_1 + p_{2f}\, V_2) \\ &= 3\, p_{1f}\, V_1 \end{aligned}$$

L'énergie interne initiale s'exprime quant à elle comme

$$E_1 = \frac{3}{2} n_1\, R\, T_1 = \frac{3}{2} p_1\, V_1$$

Or, comme il n'y a ni transfert thermique, ni travail de force extérieure, la variation d'énergie interne pour l'ensemble du gaz est nulle :

$$E_f - E_1 = 0$$

On en déduit immédiatement :

$$p_{1f} = p_{2f} = \frac{p_1}{2}$$

(on peut remarquer que ce résultat est le même que pour la question 2)

9. On suppose que pour le gaz resté dans le compartiment 1, la transformation a été quasi-statique ; pour ce gaz, la pression est alors reliée à la température par la formule :

$$p_{1f} = p_1 \left(\frac{T_{1f}}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Déterminez les températures T_{1f} et T_{2f}.
Application numérique (on prendra $\gamma = 1,4$).

Réponse:
De la relation donnée par l'énoncé, on déduit

$$T_{1f} = T_1 \left(\frac{p_{1f}}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 240 \text{ K}$$

On utilise ensuite la relation de la question 6 pour obtenir T_{2f} :

$$\begin{aligned} \frac{p_{2f}}{T_{2f}} &= \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_{1f}}{T_{1f}} \\ \frac{1}{T_{2f}} &= \frac{2}{T_1} - \frac{1}{T_{1f}} \\ &= \frac{2}{T_1} - \frac{2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_1} \end{aligned}$$

Finalement :

$$T_{2f} = \frac{T_1}{2 - 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 375 \text{ K}$$