CORRIGÉ DU CONTRÔLE DE PHYSIQUE N$^{\mathrm{O}}$ 1

3 novembre 2005

Durée : 1 h

Exercice 1

1. $[v] = [\text{distance}]/[\text{temps}] = L\ T^{-1}$.
   $[F] = [\text{masse}]\ [\text{accélération}] = M\ L\ T^{-2}$.
   $[f] = 1/[\text{période}] = T^{-1}$.
2. $[v] = L\ T^{-1} = [C]\ [m]^{\alpha}\ [\ell]^{\beta}\ [F]^{\gamma} = M^{\alpha}\ L^{\beta}\ \left(M\ L\ T^{-2}\right)^{\gamma} = M^{\alpha+\gamma}\ L^{\beta+\gamma}\ T^{-2\gamma}$,
   donc
   $$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma, \\ 1 &= \beta + \gamma, \\ -1 &= -2\,\gamma. \end{aligned}$$
   On en déduit que $\gamma = 1/2$, $\alpha = -1/2$ et $\beta = 1/2$.
3. On a $[f] = T^{-1} = [v]/[\ell]$, d'où
   $$f = C'\ v/\ell = C'\ C\sqrt{\ell\ F/m}\,/\ell = C''\sqrt{F/(m\ \ell)}\,.$$
4. La constante C'' est a priori de l'ordre de 1, donc
   $$f \approx \sqrt{F/(m\ \ell)} = \sqrt{800/(2\cdot 10^{-3}\times 40\cdot 10^{-2})} = \sqrt{10^{6}}\,,$$
   c.-à-d. $f \approx 1000$ Hz.
   Cette valeur est du même ordre de grandeur que 440 Hz : le résultat est raisonnable.

Exercice 2

1. Les forces extérieures exercées sur le système {plateau, cube} sont le poids du plateau ($\vec{P}_M = M\ g\ \vec{u}_x$), le poids du cube ($\vec{P}_m = m\ g\ \vec{u}_x$) et la tension du ressort ($\vec{T} = -k\ (x - \ell_0)\ \vec{u}_x$).
2. À l'équilibre, $\vec{P}_M + \vec{P}_m + \vec{T} = \vec{0}$, donc
   $$M\ g + m\ g - k\ (x_{\mathrm{e}} - \ell_0) = 0,$$
   d'où
   $$x_{\mathrm{e}} = \ell_0 + (M + m)\ g/k.$$
3. On a $\vec{P}_M + \vec{P}_m + \vec{T} = (M + m)\ \vec{a}$, d'où
   $$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = g - k\ (x - \ell_0)/(M + m).$$

4. On doit avoir $[\omega\, t] = 1$, soit $[\omega] = T^{-1}$.

$$x(t) = x_\mathrm{e} + \delta\ \cos(\omega\, t),$$

donc

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2\ \delta\ \cos(\omega\, t).$$

En introduisant cette solution dans l'équation du mouvement, on obtient

$$-\omega^2\ \delta\ \cos(\omega\, t) = g - k\,(x_\mathrm{e} + \delta\ \cos(\omega\, t) - \ell_0)/(M+m) = -k\,\delta\ \cos(\omega\, t)/(M+m).$$

Il faut donc que $\omega^2 = k/(M+m)$, c.-à-d.

$$\omega = \sqrt{k/(M+m)}\,.$$

$[k] = [\text{force}]/[\text{longueur}] = M\ T^{-2}$, donc on a bien $[\omega] = T^{-1}$.

5. Les forces exercées sur le cube sont le poids ($\vec{P}_m = m\ g\ \vec{u}_x$) et la réaction du plateau sur le cube ($\vec{R} = R_x\ \vec{u}_x$).

6. $\vec{R}$ est dirigée vers le haut, donc R_x est négative.
Le cube décolle quand R_x s'annule.

7. On a $\vec{P}_m + \vec{R} = m\ \vec{a}$, c.-à-d.

$$m\ \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = m\ g + R_x.$$

On obtient

$$R_x = -m\ \omega^2\ \delta\ \cos(\omega\, t) - m\ g.$$

Il y a contact entre le plateau et le cube tant que $R_x < 0$.
R_x est maximale (en valeur algébrique) quand $\cos(\omega\, t) = -1$. On a alors $R_x^\mathrm{max} = m\,\omega^2\,\delta - m\,g$.
Le cube ne décolle pas du plateau si $R_x^\mathrm{max} < 0$, c.-à-d. $\delta < g/\omega^2 = (M+m)\ g/k = \delta_\mathrm{max}$.

8. Quand R_x s'annule, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = g = -\omega^2\ (x - x_\mathrm{e})$. On en déduit que $x = \ell_0$.
Ce résultat était prévisible : quand x devient égale à ℓ_0, le ressort se comprime et freine le plateau. Le cube n'étant pas collé au plateau, il n'est pas ralenti et décolle.