LP 104
Section 2
L1 - Premier semestre

Contrôle n°2 : correction

Vendredi 16 décembre 2005

I. Chariots en interaction — 9 pts

Dans ce problème, on étudie deux chariots A et B (similaires à ceux utilisés pour les TP) de masse identique m et se déplaçant sur un banc (horizontal ou incliné). Ils interagissent à distance via une force **répulsive** – comme le faisaient les chariots du TP « chocs » en raison des aimants. Le système étudié sera l'ensemble des deux chariots $\{$chariot A + chariot $B\}$, ces derniers étant repérés par leur position sur le banc x_A et x_B ($x_B > x_A$).

Le problème étant unidimensionnel, on travaillera directement en valeur algébrique plutôt qu'avec des vecteurs.

L'énergie mécanique E_m d'un système composé de deux parties en interaction (ici les chariots) s'écrit différemment de l'énergie mécanique des systèmes simples étudiés en TD. Il y a un terme en plus qui est l'énergie potentielle d'interaction des chariots $E_{p\,\mathrm{int}}(x)$, où $x = x_B - x_A$ représente la distance entre les chariots :

$$E_m = E_{c\,A} + E_{c\,B} + E_{p\,A}(x_A) + E_{p\,B}(x_B) + E_{p\,\mathrm{int}}(x) \ ,$$

avec E_c les énergies cinétiques et E_p les énergies potentielles.

Les forces d'interaction $F_{A\to B}$ et $F_{B\to A}$ se déduisent de l'énergie potentielle $E_{p\,\mathrm{int}}$ par

$$F_{A\to B} = -\frac{\mathrm{d}E_{p\,\mathrm{int}}}{\mathrm{d}x}(x) \qquad \text{et } F_{B\to A} = \frac{\mathrm{d}E_{p\,\mathrm{int}}}{\mathrm{d}x}(x) \ .$$

Dans la suite du problème, on aura :

$$E_{p\,\mathrm{int}}(x) = \frac{C}{x^3} \ .$$

1. Donnez la dimension de la constante C ainsi que son unité S.I. (unité dans le système international).

Réponse:

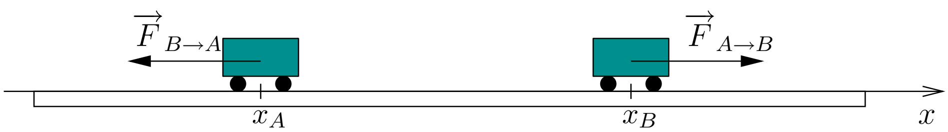
$$[C] = [x]^3 \times \left[E_{p\,\mathrm{int}}\right] = \frac{M\,L^5}{T^2}$$ 0,5

Donc C s'exprime en J.m^3 ou en kg.m^5.s^{-2}. 0,5

□

Banc horizontal

Dans cette partie, le banc est placé horizontalement. Les deux chariots sont disposés initialement en $x_A = 0$ et $x_B = x_0$, soit à une distance $x = x_0$. Ils sont maintenus à cette distance.



0,5

2. Donnez l'expression des énergies potentielles extérieures $E_{p\,A}(x_A)$ et $E_{p\,B}(x_B)$.

Réponse:
La seule force extérieure susceptible d'agir sur A et B est le poids. Cependant, le banc étant horizontal, l'énergie potentielle associée est constante aussi bien pour A que pour B (on peut la prendre nulle). On a donc

$$E_{p_A}(x_A) = 0 \quad \text{et } E_{p_B}(x_B) = 0 \ .$$ 1

□

3. Représentez sur un dessin la force $F_{A\to B}$ que A exerce sur B et donnez son expression en fonction de C et x. Déduisez-en le signe de la constante C

Réponse:
Pour le dessin, voir plus haut. On a

$$F_{a\to B} = -\frac{\mathrm{d}E_{p\,\mathrm{int}}}{\mathrm{d}x}(x) = -(-3)\,\frac{C}{x^4} = 3\,\frac{C}{x^4} \ .$$ 0,5

Pour que la force soit répulsive, il faut que $F_{a\to B}$ pointe vers la droite (de A vers B) donc qu'on ait $F_{a\to B} > 0$. On en déduit qu'il faut $C > 0$. 0,5
□

4. On libère les deux chariots **simultanément** et sans vitesse initiale :

(a) Décrivez qualitativement le mouvement des chariots quand on les libère.

Réponse:
Les chariots se repoussent donc ils vont s'éloigner l'un de l'autre. Comme il n'y a aucune raison *a priori* pour que l'un aille plus vite que l'autre (ils sont identiques donc interchangeable), ils vont s'éloigner avec la même vitesse (en valeur absolue). 0,5
□

(b) A tout instant, les chariots ont la même vitesse absolue $v(x)$. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique définie dans l'introduction, exprimez $v(x)$ en fonction de C, x_0 et x.

Réponse:
Initialement, on a

$$E_{m\,0} = \frac{1}{2}\,m\,0^2 + \frac{1}{2}\,m\,0^2 + 0 + 0 + \frac{C}{{x_0}^3} = \frac{C}{{x_0}^3} \ ,$$

tandis que lorsque les mobiles ont atteint la vitesse v, l'énergie mécanique vaut :

$$E_{m\,1} = mv^2 + \frac{C}{x^3} \ .$$ 0,5

La conservation de l'énergie mécanique donne alors $E_{m\,1} = E_{m\,0}$, soit

$$mv^2 + \frac{C}{x^3} = \frac{C}{{x_0}^3} \ ,$$

et donc

$$v(x) = \sqrt{\frac{C}{m}\left(\frac{1}{{x_0}^3} - \frac{1}{x^3}\right)} \ .$$ 0,5

□

5. On replace les chariots à leur position initiale ($x = x_0$) et on libère uniquement le chariot B sans vitesse initiale, A étant maintenu en $x_A = 0$.

(a) Décrivez qualitativement le mouvement des chariots.

Réponse:
A étant maintenu immobile, seul B va se déplacer et s'éloigner de A. Comme il est le seul à bouger, on peut s'attendre à ce qu'il bouge plus vite. 0,5

□

(b) On note $w(x)$ la vitesse de B en x. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déterminez $w(x)$ en fonction C, x_0 et x. Déduisez-en une relation entre w et v.

Réponse:
L'énergie mécanique initiale est toujours $E_{m\,0}$ (défini à la question 4.b.) :

$$E_{m\,0} = \frac{C}{{x_0}^3} \ .$$

En revanche, comme seul B se déplace, l'énergie mécanique « finale » est désormais

$$E_{m\,2} = \frac{1}{2}\, m\, w^2 + \frac{C}{x^3} \ .$$ 0,5

La conservation de l'énergie donne donc cette fois

$$w(x) = \sqrt{2\,\frac{C}{m}\left(\frac{1}{{x_0}^3} - \frac{1}{x^3}\right)} = \sqrt{2}\, v(x) \ .$$ 0,5

□

(c) *Application numérique:* Calculez v et w avec $C = 2\,.\,10^{-4}$ SI, $x = 10 \times x_0 = 1$ m, $m = 100$ g et $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

Réponse:
Pour calculer $v(x)$ et $w(x)$, on utilise que $x^{-3} \ll {x_0}^{-3}$. Il en résulte :

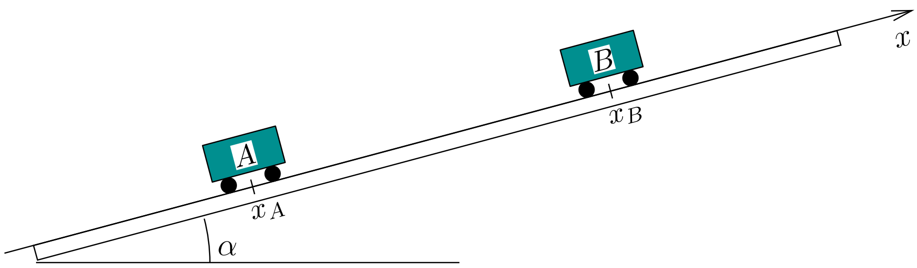
$$v(x) \simeq \sqrt{\frac{C}{m}\frac{1}{{x_0}^3}} = \sqrt{\frac{2\,.\,10^{-4}}{0,1}\,\frac{1}{0,1^3}} = \sqrt{2} \simeq 1,41 \text{ m.s}^{-1}$$

$$w(x) = \sqrt{2}\, v(x) = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ m.s}^{-1} \ .$$ 0,5

□

Banc incliné

On incline à présent le banc d'un angle α avec l'horizontale (voir dessin). Le chariot A est à nouveau maintenu immobile en $x_A = 0$ tandis que le chariot B est libre.



6. Déterminez l'expression des énergies potentielles extérieures $E_{p\,A}(x_A)$ et $E_{p\,B}(x_B)$ pour cette nouvelle configuration en fonction de m, g, α, x_A et x_B.

Réponse:
À nouveau le poids est la seule force extérieure, mais cette fois-ci il travaille, sont énergie potentielle sera donc non-nulle. L'énergie potentielle du poids est normalement $m\,g\,z$, où z est l'altitude. Ici, z est liée à x par $z = x \sin\alpha$ (en prenant l'origine des altitudes en $x = 0$). On a donc

$$E_{p\,A}(x_A) = m\,g\,\sin\alpha\,x_A = 0 \qquad \text{et} \qquad E_{p\,B}(x_B) = m\,g\,\sin\alpha\,x_B = m\,g\,\sin\alpha\,x\ .$$ 0,5

□

On note $E_p(x)$ l'énergie potentielle totale du système, soit

$$E_p(x) = E_{p\,A}(0) + E_{p\,B}(x) + E_{p\,\mathrm{int}}(x)\ .$$

On trouve la position du point d'équilibre x_e en résolvant l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = 0\ .$$

7. Montrez que l'expression de x_e est :

$$x_e = \left(\frac{3\,C}{m\,g\,\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\ .$$

Réponse:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = 0 + m\,g\,\sin\alpha - 3\frac{C}{x^4}\ .$$ 0,5

ce qui donne directement

$$x_e = \left(\frac{3\,C}{m\,g\,\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\ .$$ 0,5

□

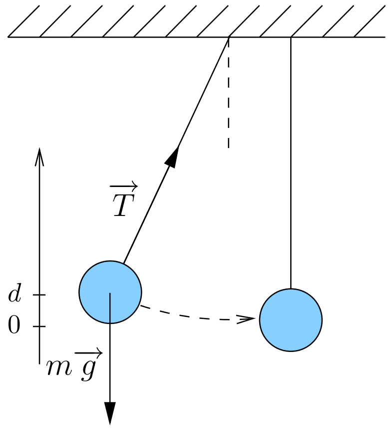
8. *Application numérique:* Calculez x_e avec $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $g = 10$ m.s^{-1} et $(12)^{\frac{1}{4}} \simeq 1,9$.

$$x_e = \left(\frac{3 \times 2\,.\,10^{-4}}{0,1 \times 10 \times 0,5}\right)^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{1}{4}} \times 0,1 = 0,19 \text{ m.}$$ 0,5

II. Sklong

7 pts

On considère deux billes de masses $m_1 = 0,1$ kg et $m_2 = 0,2$ kg. Chacune de ces billes est suspendue par un fil de telle sorte qu'au repos elles se touchent (voir dessin). La bille de masse m_1 est élevée d'une hauteur $d = 0,2$ m puis lachée sans vitesse initiale. 0,5



Chute

Dans un premier temps, on étudie la phase de descente de la bille m_1 :

1. Enumérez et représentez sur un dessin toutes les forces agissant sur la bille m_1 pendant qu'elle descend.

Réponse:

Il y a le poids $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{g}$ et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ (pour le reste, voir le dessin). 0,5

On pouvait également mentionner les forces de frottements, celles-ci n'étant supposées nulles qu'à la question suivante.

□

2. En l'absence de frottement, déterminez la vitesse v_1 de la bille m_1 juste avant le choc.

Réponse:

On utilise la conservation de l'énergie mécanique puisqu'il n'y a pas de frottement. L'énergie potentielle associée au poids est $m\,g\,z$ et la tension du fil ne travaille pas puisque $\overrightarrow{T}$ est à tout instant perpendiculaire au déplacement ($\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v} = 0$). La conservation de l'énergie mécanique donne

$$0 + m\,g\,d = \frac{1}{2}\,m\,{v_1}^2$$ 0,5

soit

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,d}\ .$$ 0,5

□

Choc

On s'intéresse à présent au choc. On notera v_1 et v_2 les vitesses avant le choc et v_1' et v_2' les vitesses après le choc.

3. Ecrivez la conservation de la quantité de mouvement.

Réponse:

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$m_1\,v_1' + m_2\,v_2' = m_1\,v_1 + m_2\,v_2\ ,$$

soit, étant donné que $v_2 = 0$,

$$m_1\,v_1' + m_2\,v_2' = m_1\,v_1\ .$$ 1

□

4. Ecrivez la conservation de l'énergie cinétique. Pour quel type de choc l'énergie cinétique est-elle conservée ?

Réponse:
La conservation de l'énergie cinétique s'exprime

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

soit

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 \ . \qquad 0{,}5$$

L'énergie cinétique est conservée pour les chocs élastiques. 0,5
□

On peut décrire des chocs plus généraux en substituant à la conservation de l'énergie cinétique la relation suivante où e est appelé coefficient de restitution :

$$v_2' - v_1' = -e\,(v_2 - v_1) \ .$$

Un choc élastique correspondra alors au cas $e = 1$ et un choc parfaitement mou à $e = 0$.

5. En utilisant le résultat de la question 3. et en supposant vérifiée cette dernière relation, déterminez les expressions de v_1' et v_2' en fonction de v_1, m_1, m_2 et e.

Réponse:
La question 3. et la relation proposée forment le système suivant :

$$\begin{cases} m_1\, v_1' + m_2\, v_2' = m_1\, v_1 \\ -v_1' + v_2' = e\, v_1 \end{cases} .$$

On obtient alors

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\, v_1' = m_1 - e\, m_2\, v_1 \\ v_2' = v_1' + e\, v_1 \end{cases} ,$$

et donc

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - e\, m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \\ v_2' = \dfrac{(1+e)\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \end{cases} . \qquad 1$$

□

6. Faites les applications numériques dans le cas $e = 1$ et dans le cas $e = 0$. Pour chaque cas, précisez de quel côté part la bille m_1 (gauche ou droite par rapport au dessin). On donne : $g = 10$ m.s^{-2} et $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

Réponse:
On calcule déjà v_1. D'après lea question 1. on a

$$v_1 = \sqrt{2\, g\, d} = \sqrt{2} \simeq 1,41 \text{ m.s}^{-1}$$

Pour le cas $e = 1$ (choc élastique), on a alors

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2} \simeq -0,47 \text{ m.s}^{-1} \\ v_2' = \dfrac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \simeq 0,94 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} . \qquad 0{,}5$$

Dans ce cas, la bille m_1 repart en arrière, c'est à dire vers la gauche. Ce n'est pas surprenant, on est dans la cas d'un objet léger heurtant un objet lourd : l'objet léger rebondit. 0,5

Pour le cas $e = 0$ (choc mou), on obtient :

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \simeq 0,47 \text{ m.s}^{-1}$$ 0,5

Les deux billes continuent leur trajet ensemble (c'est le principe du choc mou). La bille m_1 remontent donc vers la droite. 0,5

On peut ajouter un dernier cas intermédiaire $e = 0,5$ correspondant à un choc inélastique mais non mou. En TP, il s'agirait par exemple du choc aimant contre velcroc : une partie de l'énergie cinétique est dissipée mais les deux mobiles continuent leur choc indépendamment néanmoins. On obtient dans ce cas

$$\left\{\begin{array}{l} v_1' = \dfrac{m_1 - 0,5\, m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 = 0 \text{ m.s}^{-1} \\ v_2' = \dfrac{(1,5)\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \simeq 0,705 \text{ m.s}^{-1} \end{array}\right. .$$

Ces résultats ressemblent à un carreau (puisque $v_1' = 0$) mais l'énergie cinétique totale n'est pas conservée. m_2 continue donc sa course avec une énergie cinétique inférieure à celle de m_1 avant le choc.

□

III. « Pompe à chaleur » 11 pts

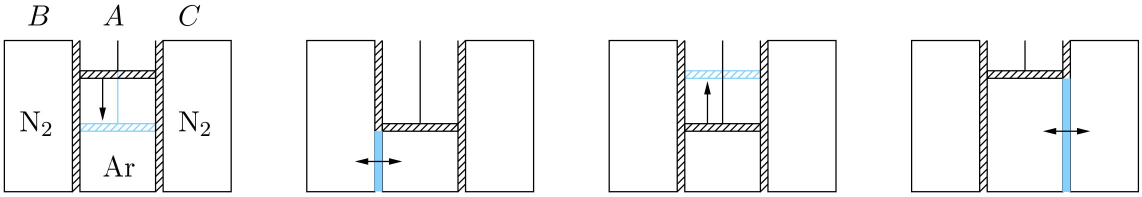
On considère un piston A rempli de n_A moles d'un gaz d'argon (Ar). Ce piston est mis en contact avec deux réservoirs B et C contenant chacun n_N moles de diazote N_2. Les parois assurant le contact avec les réservoirs peuvent être diathermes (elles laissent passer la chaleur) ou adiabatiques (elles ne laissent pas passer la chaleur) à la demande. On s'intéresse au cycle de fonctionnement suivant, où toutes les transformations sont **quasi-statiques** :

(a) le gaz d'argon est comprimé du volume V_0 au volume $V_1 = \lambda V_0$ ($0 < \lambda < 1$) de façon **adiabatique** (aucune paroi ne laisse passer la chaleur) ;

(b) la paroi assurant le contact avec le réservoir B est rendue diatherme jusqu'à ce que A et B aient thermalisé **(ils ont la même température finale : $T_A = T_B = T_2$)** ;

(c) le gaz d'argon est détendu du volume V_1 au volume V_0 de façon **adiabatique** (toutes les parois sont à nouveau adiabatiques) ;

(d) la paroi assurant le contact avec le réservoir C est rendue diatherme jusqu'à thermalisation de A et C **(même température finale : $T_A = T_C = T_4$)**.



a) b) c) d)

Pour cet exercice, les applications numériques étant compliquées, on pourra les faire « grossièrement » (un ou deux chiffres significatifs).

On note C_A et C_N les capacités thermiques molaires à volume constant des gaz d'argon et de diazote.

1. Donnez l'expression de C_A et C_N en fonction de la constante des gaz parfaits R.

Réponse:
L'argon est un gaz monoatomique et le diazote un gaz diatomique. On a donc

$$C_A = \frac{3}{2} R \qquad \text{et } C_N = \frac{5}{2} R \ . \qquad 1$$

□

2. Rappelez l'expression des énergies internes $U_A(T)$, $U_B(T)$ et $U_C(T)$ pour chacun des gaz.

Réponse:
A contient n_A moles d'un gaz monoatomique donc

$$U_A(T) = n_A\, C_A, T = \frac{3}{2} n_A\, R\, T \ . \qquad 0,5$$

En revanche, B et C contiennent n_N moles d'un gaz diatomiques donc

$$U_B(T) = U_C(T) = n_N\, C_N\, T = \frac{5}{2} n_N\, R\, T \ . \qquad 0,5$$

□

Initialement, tous les gaz sont à la température $T_0 = 300K$ et à la pression $P_0 = 1$ bar. Tous les volumes initiaux sont également pris égaux $V_0 = V_B = V_C = 1$ L.

3. Calculez les nombres de moles de gaz n_A et n_N (rappel : $R = \frac{25}{3}$ J.K^{-1}.mol^{-1})

Réponse:
On utilise la loi des gaz parfaits :

$$P_0\, V_0 = n\, R\, T_0$$

donc

$$n_A = n_N = \frac{P_0\, V_0}{R\, T_0} = \frac{10^5\, 10^{-3}}{\frac{25}{3}\, 300} = \frac{1}{25} \text{ mol} = 0,04 \text{ mol} \ . \qquad 0,5$$

□

4. La première transformation est une compression adiabatique quasi-statique :

(a) Rappelez la loi liant T et V lors d'une transformation adiabatique et quasi-statique.

Réponse:
Pour une transformation adiabatique quasistatique, on a :

$$T\, V^{\gamma-1} = \text{C}^{\text{te}} \ . \qquad 0,5$$

□

(b) Déduisez-en l'expression de la température T_1 du gaz d'argon après la compression en fonction de λ, γ et T_0. Faites l'application numérique : $\gamma = \frac{5}{3}$, $\lambda = 0,5$, $2^{\frac{2}{3}} \simeq 1,6$ et $2^{-\frac{2}{3}} \simeq 0,63$.

Réponse:
En appliquant la relation précédente entre l'état initial (V_0, T_0) et l'état final (V_1, T_1), on trouve

$$T_0\, V_0^{\gamma-1} = T_1\, V_1^{\gamma-1}$$

soit

$$T_1 = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} T_0 = \lambda^{1-\gamma}\, T_0 \simeq 480 \text{ K} .$$ 0,5+0,5

□

5. On rend ensuite la paroi avec B diatherme et on laisse A et B thermaliser jusqu'à atteindre la température T_2 :

(a) Ecrivez le premier principe. Déduisez-en la température finale T_2 des deux gaz en fonction de T_0, T_1, n_A, n_N, C_A et C_N. Faites l'application numériques : $\frac{3}{8} = 0,375$.

Réponse:
L'énergie interne initiale du système $\{A + B\}$ est

$$U_{AB\,i} = n_A\, C_A\, T_1 + n_N\, C_N\, T_0$$

et son énergie interne finale

$$U_{AB\,f} = (n_A\, C_A + n_N\, C_N)\, T_2 .$$

Pendant l'évolution, ce système ne reçoit ni travail (pas de changement de volume) ni chaleur (tous les échanges de chaleur sont internes, les parois autour du système $\{A + B\}$ sont adiabatiques). Le premier principe donne donc

$$U_{AB\,f} - U_{AB\,i} = (n_A\, C_A + n_N\, C_N)\, T_2 - n_A\, C_A\, T_1 + n_N\, C_N\, T_0 = 0 .$$ 1

On en déduit immédiatement

$$T_2 = \frac{n_A\, C_A}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_1 + \frac{n_N\, C_N}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 = \frac{3}{8}\, 480 + \frac{5}{8}\, 300 = 367,5 \text{ K}$$ 0,5+0,5

□

(b) Montrez que l'on a :

$$T_2 = \frac{n_N\, C_N}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 + \lambda^{1-\gamma}\, \frac{n_A\, C_A}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 .$$

Réponse:
Dans l'expression de T_2, on remplace T_1 par son expression obtenue en 4.b :

$$T_2 = \lambda^{1-\gamma}\, \frac{n_A\, C_A}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 + \frac{n_N\, C_N}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 .$$ 0,5

□

6. On procède ensuite à la détente adiabatique quasi-statique du gaz d'argon. Le gaz passe du volume V' et de la température T_2 au volume V et à la température T_3.

(a) Déterminez T_3 et faites l'application numérique.

Réponse:
De même que pour la première transformation, on a $T\,V^{\gamma-1} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ donc

$$T_3 = \lambda^{\gamma-1} T_2 \simeq 2^{-\frac{2}{3}} \times 367,5 \simeq 232 \text{ K}$$ 0,5+0,5

□

(b) Montrez que l'on a :

$$T_3 = \frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_N\,C_N}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 \;.$$

Réponse:
À nouveau, on remplace T_2 par son expression dans la formule précédente :

$$\begin{aligned} T_3 &= \lambda^{\gamma-1} T_2 \\ &= \frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_N\,C_N}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 \;. \end{aligned}$$ 0,5

□

7. Enfin, on thermalise A avec C et on note T_4 la température finale :

(a) Utilisez le premier principe pour déterminer la température finale T_4 des gaz A et C. Faites l'application numérique.

Réponse:
L'énergie interne initiale du système $\{A + C\}$ est

$$U_{AC\,i} = n_A\,C_A\,T_3 + n_N\,C_N\,T_0$$

et son énergie interne finale

$$U_{AC\,f} = (n_A\,C_A + n_N\,C_N)\,T_4 \;.$$

Pendant l'évolution, ce système ne reçoit ni travail (pas de changement de volume) ni chaleur (tous les échanges de chaleur sont internes, les parois autour du système $\{A + C\}$ sont adiabatiques). Le premier principe donne donc

$$U_{AC\,f} - U_{AC\,i} = (n_A\,C_A + n_N\,C_N)\,T_4 - n_A\,C_A\,T_3 + n_N\,C_N\,T_0 = 0 \;.$$ 0,5

On en déduit immédiatement

$$T_4 = \frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_3 + \frac{n_N\,C_N}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 \simeq \frac{3}{8}\,232 + \frac{5}{8}\,300 = 274,5 \text{ K} \;.$$ 0,5+0,5

□

(b) Montrez que l'on a :

$$T_4 = \left(1 - \frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\right) T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\,T_0\ .$$

Réponse:
Encore une fois, on remplace T_3 par son expression dans la formule précédente. On obtient :

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\left(\frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_N\,C_N}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0\right) + \frac{n_N\,C_N}{n_A\,C_A + n_N\,C_N}\,T_0 \\ &= \frac{(n_A\,C_A)^2 + (n_A\,C_A + n_N\,C_N)\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\,T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\,T_0 \end{aligned}$$

On utilisant une égalité remarquable, on a

$$(n_A\,C_A)^2 + (n_A\,C_A + n_N\,C_N)\,n_N\,C_N = (n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2 - n_A\,C_A\,n_B\,C_N$$

ce qui conduit finalement à

$$T_4 = \left(1 - \frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\right) T_0 + \lambda^{\gamma-1}\,\frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2}\,T_0\ . \qquad 0{,}5$$

□

Les variations de températures pour les gaz B et C sur ce cycle sont données par :

$$\Delta T_B = \frac{T_2 - T_0}{T_0} \qquad \text{et} \qquad \Delta T_C = \frac{T_4 - T_0}{T_0}$$

8. Donnez les expressions théoriques et les valeurs numériques de ΔT_B et ΔT_C.

Réponse:
Á partir des résultats précédents, on obtient directement

$$\begin{aligned} \Delta T_B &= \left(\lambda^{1-\gamma} - 1\right)\frac{n_A\,C_A}{n_A\,C_A + n_N\,C_N} \simeq 21,5\% & 0{,}5 \\ \Delta T_C &= \left(\lambda^{\gamma-1} - 1\right)\frac{n_A\,C_A\,n_N\,C_N}{(n_A\,C_A + n_N\,C_N)^2} \simeq -8,7\% & 0{,}5 \end{aligned}$$

□