PHYS 104
Section 2
L1 - Premier semestre

# Contrôle n°2

Vendredi 16 décembre 2005

**Durée : 2 heures**.
Les documents et les calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les résultats doivent toujours être donnés sous forme littérale avant de procéder à l'application numérique lorsqu'elle est demandée.

Les trois exercices sont indépendants.

## I. Chariots en interaction

Dans ce problème, on étudie deux chariots $A$ et $B$ (similaire à ceux utilisés pour les TPs) de masse identique $m$ et se déplaçant sur un banc (horizontal ou incliné). Ils interagissent à distance via une force **répulsive** – comme le faisaient les chariots du TP chocs en raison des aimants. Le système étudié sera l'ensemble des deux chariots {chariot $A$ + chariot $B$}, ces derniers étant repérés par leur position sur le banc $x_A$ et $x_B$ ($x_B > x_A$).

Le problème étant unidimensionnel, on travaillera directement en grandeur algébrique plutôt qu'avec des vecteurs.

L'énergie mécanique $E_m$ d'un système composé de deux parties en interaction (ici les chariots) s'écrit différemment de l'énergie mécanique des systèmes simples étudiés en TD. Il y a un terme en plus qui est l'énergie potentielle d'interaction des chariots $E_{p\,\text{int}}(x)$ où $x = x_B - x_A$ représente la distance entre les chariots :

$$E_m = E_{c\,A} + E_{c\,B} + E_{p\,A}(x_A) + E_{p\,B}(x_B) + E_{p\,\text{int}}(x_A, x_B)$$

avec $E_c$ les énergies cinétiques et $E_p$ les énergies potentielles.

Les forces d'interaction $F_{A\to B}$ et $F_{B\to A}$ se déduisent de l'énergie potentielle $E_{p\,\text{int}}$ par :

$$F_{A\to B} = -\frac{\mathrm{d}E_{p\,\text{int}}}{\mathrm{d}x}(x) \qquad F_{B\to A} = \frac{\mathrm{d}E_{p\,\text{int}}}{\mathrm{d}x}(x)$$

Dans la suite du problème, on aura :

$$E_{p\,\text{int}}(x) = \frac{C}{x^3}$$

1. Donnez la dimension de la constante $C$ ainsi que son unité S.I.

### Banc horizontal

Dans cette partie, le banc est placé horizontalement. Les deux chariots sont disposés initialement en $x_A = 0$ et $x_B = x_0$, soit à une distance $x = x_0$. Ils sont maintenus à cette distance.


2. Donnez l'expression des énergies potentielles extérieures $E_{p\,A}(x_A)$ et $E_{p\,B}(x_B)$.

3. Représentez sur un dessin la force $F_{A\to B}$ que $A$ exerce sur $B$ et donnez son expression en fonction de $C$ et $x$. Déduisez-en le signe de la constante $C$

4. On libère les deux chariots **simultanément** et sans vitesse initiale :

(a) Décrivez qualitativement le mouvement des chariots quand on les libère.

(b) A tout instant, les chariots ont la même vitesse absolue $v(x)$. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique définie dans l'introduction, exprimez $v(x)$ en fonction de $C$, $x_0$ et $x$.

5. On replace les chariots à leur position initiale ($x = x_0$) et on libère uniquement le chariot $B$ sans vitesse initiale, $A$ étant maintenu en $x_A = 0$.

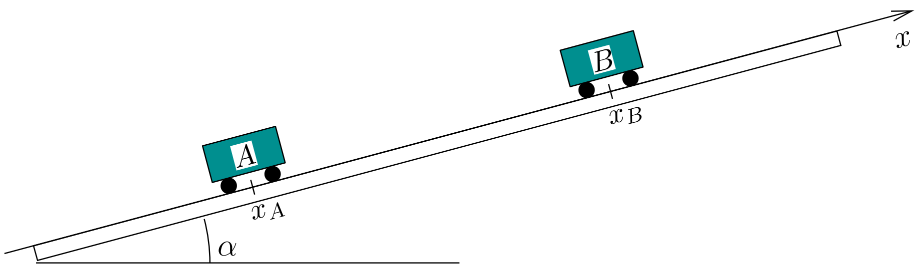
(a) Décrivez qualitativement le mouvement des chariots.

(b) On note $w(x)$ la vitesse de $B$ en $x$. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déterminez $w(x)$ en fonction $C$, $x_0$ et $x$. Déduisez-en une relation entre $w$ et $v$.

(c) *Application numérique:*Calculez $v$ et $w$ avec $C = 2\,10^{-4}$ SI, $x = 10 \times x_0 = 1$ m, $m = 100$ g et $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

## Banc incliné

On incline à présent le banc d'un angle $\alpha$ avec l'horizontal comme représenté sur le dessin. Le chariot $A$ est à nouveau maintenu immobile en $x_A = 0$ tandis que le chariot $B$ est libre.




6. Déterminez les expressions des énergies potentielles extérieures $E_{p\,A}(x_A)$ et $E_{p\,B}(x_B)$ pour cette nouvelle configuration en fonction de $m$, $g$, $\alpha$ et $x_A$ et $x_B$.

On note $E_p(x)$ l'énergie potentielle totale du système, soit :

$$E_p(x) = E_{p\,A}(0) + E_{p\,B}(x) + E_{p\,\mathrm{int}}(x)$$

On trouve la position du point d'équilibre $x_e$ en résolvant l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

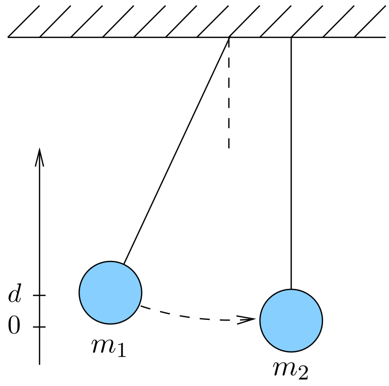
7. Montrez que l'expression de $x_e$ est :

$$x_e = \left(\frac{3\,C}{m\,g\,\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$$

8. *Application numérique:*Calculez $x_e$ avec $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $g = 10$ m.s$^{-1}$ et $(12)^{\frac{1}{4}} \simeq 1,9$.

# II. Bing

On considère deux billes de masses $m_1 = 0,1$ kg et $m_2 = 0,2$ kg. Chacune de ces billes est suspendue par un fil de telle sorte qu'au repos elles se touchent comme cela est représenté sur le dessin. La bille de masse $m_1$ est élevée d'une hauteur $d = 0,2$ m puis lachée sans vitesse initiale.




### Chute

Dans un premier temps, on étudie la phase de descente de la bille $m_1$ :

1. Enumérez et représentez sur un dessin toutes les forces agissant sur la bille $m_1$ pendant qu'elle descend.

2. En l'absence de frottement, déterminez la vitesse $v_1$ de la bille $m_1$ juste avant le choc.

### Choc

On s'intéresse à présent au choc. On notera $v_1$ et $v_2$ les vitesses avant le choc et $v_1'$ et $v_2'$ les vitesses après le choc.

3. Ecrivez la conservation de la quantité de mouvement.

4. Ecrivez la conservation de l'énergie cinétique. Pour quel type de choc l'énergie cinétique est-elle conservée ?

On peut décrire des chocs plus généraux en substituant à la conservation de l'énergie cinétique la relation suivante où $e$ est appelé coefficient de restitution :

$$v_2' - v_1' = -e(v_2 - v_1)$$

Un choc élatisque correspondra alors au cas $e = 1$ et un choc parfaitement mou à $e = 0$.

5. En utilisant le résultat de la question 3. et en supposant vérifiée cette dernière relation, déterminez les expressions de $v_1'$ et $v_2'$ en fonction de $v_1$ , $m_1$, $m_2$ et $e$.

6. Faites les applications numériques dans le cas $e = 1$ et dans le cas $e = 0$. Pour chaque cas, précisez de quel côté part la bille $m1$ (gauche ou droite par rapport au dessin).

# III. "Pompe à chaleur"

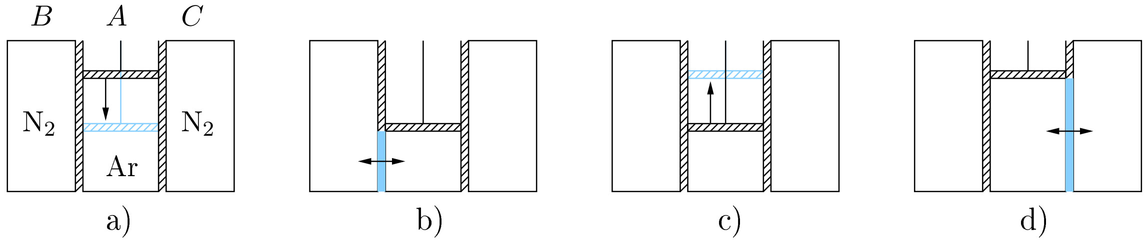
On considère un piston $A$ rempli de $n_A$ moles d'un gaz d'argon ($Ar$). Ce piston est mis en contact avec deux réservoirs $B$ et $C$ contenant chacun $n_N$ moles de diazote $N_2$. Les parois assurant le contact avec les réservoirs peuvent être diatherme (elles laissent passer la chaleur) ou adiabatique (elles ne laissent pas passer la chaleur) à la demande. On s'intéresse au cycle de fonctionnement suivant où toutes les transformations sont **quasi-statiques** :

(a) le gaz d'argon est comprimé du volume $V$ au volume $V' = \lambda V$ $(0 < \lambda < 1)$ de façon **adiabatique** (aucune paroi ne laisse passer la chaleur) ;

(b) la paroi assurant le contact avec le réservoir $B$ est rendue diatherme jusqu'à ce que $A$ et $B$ aient thermalisé (ils ont la même température finale) ;

(c) le gaz d'argon est détendu du volume $V'$ au volume $V$ de façon **adiabatique** (toutes les parois sont à nouveau adiabatiques) ;

(d) la paroi assurant le contact avec le réservoir $C$ est rendue diatherme jusqu'à thermalisation de $A$ et $C$ ;




**Pour cet exercice, les applications numériques étant compliquées, on pourra les faire "grossièrement" (un ou deux chiffres significatifs).**

On note $C_A$ et $C_N$ les capacités calorifiques molaires des gaz d'argon et de diazote :

1. Donnez l'expression de $C_A$ et $C_N$ en fonction de la constante des gaz parfaits $R$.

2. Rappelez l'expression des énergies internes $U_A(T)$, $U_B(T)$ et $U_C(T)$ pour chacun des gaz.

Initialement, tous les gaz sont à la température $T_0 = 300K$ et à la pression $P_0 = 1$ bar. Tous les volumes initiaux sont également pris égaux $V = V_B = V_C = 1$ L (expérience de table).

3. Calculez les nombres de moles de gaz $n_A$ et $n_N$ (rappel : $R = \frac{25}{3}$ J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$)

4. La première transformation est une compression adiabatique quasi-statique :
   (a) Rappelez la loi liant $T$ et $V$ lors d'une transformation adiabatique et quasi-statique.
   (b) Déduisez-en l'expression de la température $T_1$ du gaz d'argon après la compression en fonction de $\lambda$, $\gamma$ et $T_0$. Faites l'application numérique : $\gamma = \frac{5}{3}$, $\lambda = 0,5$, $2^{-\frac{2}{3}} \simeq 0,63$

5. On rend ensuite la paroi avec $B$ diatherme et on laisse $A$ et $B$ thermaliser :
   (a) Décrivez les gaz $A$ et $B$ au début et à la fin de la transformation (c'est à dire donnez leur volume, température et énergie interne).
   (b) Ecrivez le premier principe. Déduisez-en la température finale $T_2$ des deux gaz en fonction de $T_0$, $T_1$, $n_A$, $n_N$, $C_A$ et $C_N$. Faites l'application numériques : $\frac{3}{8} = 0.375$
   (c) Montrez que l'on a :

$$T_2 = \frac{n_N\, C_N}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 + \lambda^{1-\gamma}\, \frac{n_A\, C_A}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0$$

6. On procède ensuite à la détente adiabatique quasi-statique du gaz d'argon. Le gaz passe du volume $V'$ et de la température $T_2$ au volume $V$ et à la température $T_3$.
   (a) Déterminez $T_3$ et faites l'application numérique.
   (b) Montrez que l'on a :

$$T_3 = \frac{n_A\, C_A}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0 + \lambda^{\gamma-1}\, \frac{n_N\, C_N}{n_A\, C_A + n_N\, C_N}\, T_0$$

7. Enfin, on thermalise $A$ avec $C$ :
   (a) Utilisez le premier principe pour déterminer la température finale $T_4$ des gaz $A$ et $C$. Faites l'application numérique.
   (b) Montrez que l'on a :

$$T_4 = \left(1 - \frac{n_A\, C_A\, n_N\, C_N}{(n_A\, C_A + n_N\, C_N)^2}\right) T_0 + \frac{n_A\, C_A\, n_N\, C_N}{(n_A\, C_A + n_N\, C_N)^2}\, T_0$$

Les variations de températures pour les gaz $B$ et $C$ sur ce cycle sont données par :

$$\Delta T_B = \frac{T_2 - T_0}{T_0} \qquad \text{et} \qquad \Delta T_C = \frac{T_4 - T_0}{T_0}$$

8. Donnez les expressions théoriques et les valeurs numériques de $\Delta T_B$ et $\Delta T_C$.