Université Pierre et Marie Curie — Année universitaire 2008-2009

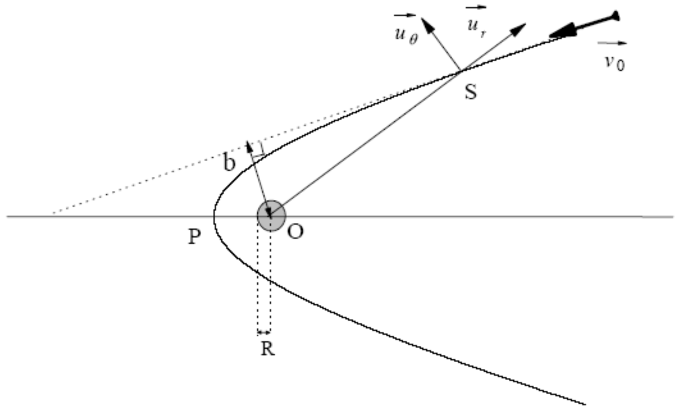
UE LP 102 **Physique du mouvement**

Examen du 27 mai 2009

Durée : 2 h

L'utilisation de calculatrices ou de documents n'est pas autorisée.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Partie A. — Un vaisseau spatial S de masse m, supposé ponctuel, se dirige, moteurs éteints, vers un astre sphérique de centre O, de masse M et de rayon R. Lorsqu'il est encore loin de O (état initial), la trajectoire de S est une droite. On notera $\vec{v}_0$ la vitesse que S possède alors, et b la distance entre O et cette droite (voir figure).



Le système {vaisseau spatial, astre} est isolé : comme $M \gg m$, le référentiel d'origine O et d'axes fixes par rapport aux étoiles lointaines est galiléen. Toutes les vitesses seront exprimées dans ce référentiel ; on notera v la norme d'une vitesse $\vec{v}$ quelconque.

On pourra utiliser des coordonnées polaires (r, θ) d'origine O dans le plan de la trajectoire. On notera $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ les vecteurs unitaires associés (voir figure), où $\overrightarrow{OS} = r\,\vec{u}_r$.

1. Écrire la force exercée par l'astre sur le vaisseau. Rappeler sans démonstration l'expression de l'énergie potentielle dont cette force dérive.
2. Montrer, en utilisant le moment cinétique $\vec{L}_O$ de S pris par rapport à O, que la trajectoire du vaisseau est plane. Préciser ce plan en fonction des conditions initiales.
3. Préciser la nature de la trajectoire du vaisseau.
4. Montrer que $\| \vec{L}_O \| = m\,v_0\,b$.
5. On appelle P le point de la trajectoire du vaisseau le plus proche de O. On note $r_P = \| \overrightarrow{OP} \|$ et $\vec{v}_P$ la vitesse du vaisseau en ce point. Montrer que $\vec{v}_P$ est orthogonal à $\overrightarrow{OP}$.
6. Exprimer v_P en fonction de b, v_0 et r_P.
7. Exprimer les énergies potentielle E_p et cinétique E_c du vaisseau au point P.

8. En déduire une expression de b en fonction de v_0, r_P, M et de la constante de gravitation universelle G.
9. On souhaite avoir $r_P = 2\,R$. Calculer numériquement b et v_P.

   Données : $M = 1{,}5\times 10^{23}$ kg, $R = 2{,}5\times 10^{3}$ km (ce sont les caractéristiques de Titan, un satellite de Saturne), $v_0 = 5{,}0\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $G = 6{,}7\times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$; on utilisera $3\times 6{,}7 \cong 20$ et $\sqrt{29} \cong 5{,}4$.

Partie B. — Au point P, le vaisseau est instantanément (en un temps suffisamment court pour que l'interaction avec l'astre puisse être négligée pendant le processus) séparé en deux parties : la première, de masse m_1, est une station d'observation mise en orbite autour de l'astre à la vitesse $\vec{v}_{1P}$; la seconde, de masse m_2, avec $m_1 + m_2 = m$, est une sonde qui poursuit sa route avec une vitesse $\vec{v}_{2P}$ (ce sont les vitesses juste après la séparation).

10. Donner la relation entre $\vec{v}_P$, $\vec{v}_{1P}$ et $\vec{v}_{2P}$. Justifier.
11. Pour effectuer la séparation, il a fallu fournir de l'énergie. Calculer ΔE_c, somme des énergies cinétiques de la station et de la sonde juste après la séparation moins l'énergie cinétique du vaisseau juste avant celle-ci. Montrer que
$$\Delta E_\mathrm{c} = \frac{(m_1 + m_2)\,m_1}{2\,m_2}\left(\vec{v}_{1P} - \vec{v}_P\right)^2 .$$
12. Déterminer, en utilisant la deuxième loi de Newton, la norme v_1 de la vitesse d'un corps de masse m_1 décrivant une orbite circulaire de rayon r autour de l'astre. Exprimer son énergie mécanique E_m en fonction de G, M, m_1 et r.
13. Quelle vitesse v_{1P} doit-on donner à la station d'observation pour qu'elle soit en orbite circulaire de rayon $r_P = 2\,R$ autour de l'astre ? Calculer numériquement v_{1P} ; on rappelle que $\sqrt{2} \cong 1{,}4$.
14. On admet que $\vec{v}_{1P}$ et $\vec{v}_{2P}$ sont colinéaires et de même sens. Exprimer v_{2P} en fonction de v_{1P} et v_P ; on prendra $m_1 = 0{,}1\,m$ et $m_2 = 0{,}9\,m$. Montrer que $v_{2P} > v_P$. En déduire la nature de la trajectoire de la sonde.

Partie C. — Titan est entouré d'une atmosphère raréfiée qui produit une force de frottement $\overrightarrow{F_\mathrm{f}} = -K\, v_1\, \vec{v}_1$ sur la station d'observation, où $\vec{v}_1$ est sa vitesse à un instant quelconque et K est une constante positive. On fera l'approximation que la force de frottement est faible devant la force de gravitation, et que, *sur une période de révolution*, la station reste sur une orbite circulaire de rayon r (en fait, r évolue lentement) et garde une vitesse de norme constante.

15. Calculer le travail W de la force de frottement sur une période de révolution en fonction de K, r et v_1.
16. En déduire la variation ΔE_m de l'énergie mécanique de la station.
17. En utilisant l'expression de E_m calculée à la question 12, déterminer l'évolution de l'altitude de la station.
18. Exprimer la variation relative $\Delta r / r$ de l'altitude de l'orbite, au bout d'une période, en fonction de K, r, et m_1.
19. De la Terre, on mesure en fait une variation relative $\Delta T / T$ de la période de révolution de la station. Exprimer $\Delta T / T$ en fonction de K, r et m_1.