Université Pierre et Marie Curie
Licence de Sciences et Technologies
Cycle d'intégration L1

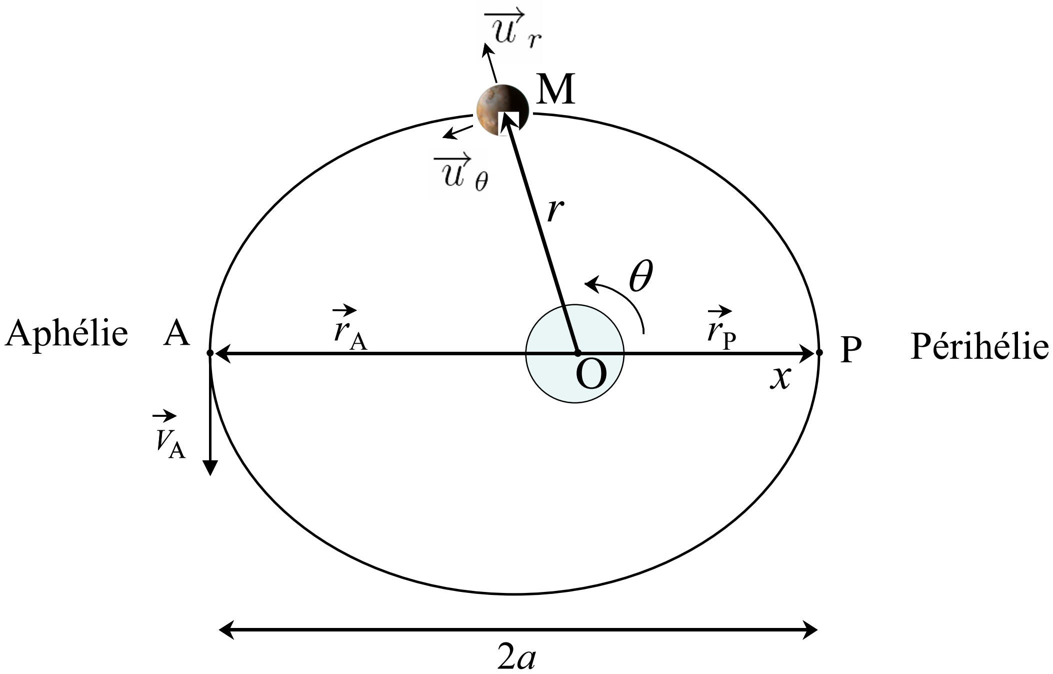
Année universitaire 2006-2007
LP 102 : *Physique du mouvement*

Examen du 28 mai 2007

Durée : 2 h

- ♢ Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
- ♢ Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
- ♢ Justifier de façon concise vos réponses aux questions.
- ♢ Indiquer votre nom en majuscules, ainsi que votre prénom et votre date de naissance dans le volet prévu sur la copie.

Orbite de Mercure



L'orbite de la planète Mercure s'écarte notablement de celle prévue par la première loi de Kepler : elle ressemble certes à une ellipse, mais dont le grand axe (AP sur la figure) tourne autour du Soleil, dans le plan de la trajectoire, à une vitesse angulaire Ω d'environ $56''$ (secondes d'arc) par année terrestre. Ce phénomène, appelé *précession du périhélie*, a deux causes : l'attraction gravitationnelle des autres planètes, principalement, et une petite correction apportée à la loi de gravitation newtonienne par la relativité générale.

Dans la partie I, on étudiera l'orbite de Mercure en négligeant l'influence des autres planètes et la correction relativiste. La masse du Soleil étant très supérieure à celle de tous les autres corps du système solaire réunis, on confondra le centre d'inertie du système solaire, supposé isolé, et le centre du Soleil, situé en O. On décrira le mouvement de la planète, représentée par le point M, dans le référentiel galiléen $(Oxyz)$ défini ainsi : M tourne dans le sens trigonométrique autour de O dans le plan (Oxy) ; l'axe (Ox) est dirigé de l'aphélie A vers le périhélie P.

Dans la partie II, on étudiera la précession du périhélie en modélisant l'influence des autres planètes et la correction relativiste par une petite force s'ajoutant à la force gravitationnelle newtonienne exercée par le Soleil sur Mercure.

I. Orbite dans le modèle elliptique

L'objectif de cette partie est, connaissant la période T de révolution de Mercure autour du Soleil et l'excentricité e de son orbite, d'en déduire d'autres grandeurs intéressantes : la longueur du grand axe de l'ellipse ; le moment cinétique ; la distance des points extrémaux A et P au Soleil, r_A et r_P ; et la norme de la vitesse en ces points, v_A et v_P.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $T = 87{,}6$ jours $\simeq 88$ jours ;
- $e = 0{,}206 \simeq 0{,}2$;
- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}7\times10^{-11}$ unités S.I. ;
- masse du Soleil : $M_S = 2\times10^{30}$ kg.

On rappelle que l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire elliptique est

$$r = \frac{p}{1 + e\,\cos\theta},$$

où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\widehat{(Ox), \overrightarrow{OM}})$,

$$p = \frac{L_O^2}{G\,M_S\,m^2} = \frac{L_O^2}{k\,m},$$

$\vec{L}_O$ est le moment cinétique de Mercure par rapport à O, $L_O = \|\vec{L}_O\|$, m est la masse de Mercure et $k = G\,M_S\,m$.

Pour faciliter les calculs, on utilisera également les propriétes suivantes de l'orbite, *supposée circulaire*, de la Terre autour du Soleil :

- distance Terre-Soleil : $R_0 = 1{,}5\times10^{11}$ m ;
- période de révolution de la Terre autour du Soleil : $T_0 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{R_0^3}{G\,M_S}} \simeq 365$ jours ;
- vitesse de la Terre sur son orbite : $v_0 = \sqrt{G\,M_S/R_0} \simeq 30\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

$\diamondsuit$

1. Écrire en coordonnées polaires l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par le Soleil sur Mercure (introduire la constante k dans votre expression).
2. Calculer le moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ de la force par rapport à O.
3. Démontrer que le moment cinétique de Mercure par rapport à O est constant au cours du mouvement. Quelle est sa direction par rapport au plan de l'orbite ?
4. Le demi-grand axe a de l'orbite de Mercure est relié à T par la troisième loi de Kepler :

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m\,a^3}{k}}.$$

   Exprimer le rapport T/T_0 et en déduire une valeur numérique approchée de a (on donne $(365/88)^{2/3} \simeq 2{,}60$).
5. À partir de l'équation polaire de la trajectoire, exprimer les distances r_A et r_P en fonction de a et de e seulement. Donner leurs valeurs numériques approchées. Calculer le rapport r_A/r_P.
6. Quelle serait la trajectoire (hypothétique) de la planète si l'excentricité était nulle ?

7. Calculer le moment cinétique $\vec{L}_O$ aux points extrémaux en fonction de m, r_A, r_P, v_A et v_P.

   En déduire la norme de la vitesse au périhélie, v_P, en fonction de e, r_P, k et m seulement.

   Exprimer v_P/v_0 et en déduire la valeur numérique de v_P.

II. Orbite dans le modèle de l'ellipse perturbée

On considère le modèle dans lequel une petite force de la forme

$$\vec{F}_p(\vec{r}) = \frac{B}{r^3}\,\vec{u}_r,$$

où B est une constante, s'ajoute à la force de gravitation newtonienne exercée par le Soleil sur Mercure.

1. La force totale est-elle toujours centrale ?
2. Projeter la deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) sur la direction radiale en coordonnées polaires. On obtiendra une équation différentielle en fonction de $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ et r, ainsi que des paramètres du problème.

$\diamondsuit$

Une façon de traiter cette équation consiste à faire le changement de variable $r(\theta) \to u(\theta)$, où $u = 1/r$. En exprimant $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en fonction de L_O, m et u, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left(1 + \frac{m\,B}{L_O^2}\right)\,u = \frac{k\,m}{L_O^2}. \tag{1}$$

L'origine des angles est choisie de telle sorte que M soit au périhélie en $\theta = 0$. On notera u_0 la valeur de u en $\theta = 0$.

3. On se place dans le cas, déja étudié au I, où $B = 0$.

   Résoudre l'équation (1) ci-dessus et exprimer u en fonction de θ.

   En déduire l'équation de la trajectoire, $r(\theta)$. Vérifier que la solution est bien une conique et retrouver l'expression de p donnée au I.
4. On se place désormais dans le cas où $B \neq 0$.

   Résoudre l'équation (1) et en déduire l'équation de la trajectoire, $r(\theta)$.
5. À l'instant initial, Mercure se trouve au périhélie en $\theta = 0$. Pour quelle valeur θ' de l'angle θ la planète se trouvera-t-elle à nouveau au périhélie, c'est-à-dire au plus près du Soleil ?
6. On suppose que $|m\,B/L_O^2| \ll 1$.

   Exprimer $\theta' - 2\,\pi$ et en faire un développement limité au premier ordre en B.

   En déduire la vitesse angulaire de précession Ω en fonction de m, B, T et L_O.
7. La force $\vec{F}_p$ doit-elle être attractive ou répulsive pour que le périhélie avance dans le même sens que la planète ?
8. Représenter schématiquement le mouvement de Mercure (on exagérera la précession).

Note : La théorie newtonienne de la gravitation prévoyait une précession du périhélie de Mercure inférieure de $43''$ par siècle à la valeur observée. L'explication de ce résidu par Einstein, à l'aide de la relativité générale, a été l'un des trois succès historiques de cette théorie.