Examen du 18 juin 2009

Durée : deux heures

L'utilisation de calculatrices ou de documents est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Problème

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, que l'on munit d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe ; $\vec{u}_z$ est vertical et dirigé vers le haut. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement dans le plan horizontal $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Il n'est soumis qu'à des forces conservatives. Leur résultante $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot (x^2 + y^2),$$

où x et y sont les coordonnées cartésiennes de M , et k est une constante positive.

Partie A

1. Calculer la force $\vec{F}$ dérivant de cette énergie potentielle.
2. Établir les équations vérifiées par les coordonnées cartésiennes de M .
3. Montrer que le mouvement est périodique et préciser sa période.
4. À l'instant $t = 0$, M est au point M_0 défini par $\overrightarrow{OM_0} = x_0 \vec{u}_x$, et sa vitesse vaut $v_0 \vec{u}_y$, où x_0 et v_0 sont des quantités strictement positives.
 - a. Déterminer x et y en fonction du temps.
 - b. Montrer que

$$\left(\frac{x}{D_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{D_y}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

où D_x et D_y sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de x_0 , v_0 , m et k .

L'équation (1) est celle d'une ellipse. Indiquer son centre de symétrie et, selon les valeurs de x_0 , v_0 , m et k , la direction du grand axe et du petit axe ainsi que la longueur du demi-grand axe et du demi-petit axe.

Partie B

- On utilise dans cette partie les coordonnées polaires, $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et l'angle $\phi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$.
1. Exprimer la force $\vec{F}$ en coordonnées polaires et montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de M par rapport à O est constant.
 2. On pose $C = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z / m$. Calculer C à un instant quelconque en fonction de r , ϕ et de leurs dérivées par rapport au temps.
 3. Pourquoi l'énergie mécanique E_m de M est-elle constante ?

4. Exprimer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p en fonction des coordonnées polaires.

Écrire E_m sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_p^{\text{eff}}(r),$$

où l'énergie potentielle effective E_p^{eff} est une fonction ne dépendant que de r , et montrer que

$$E_p^{\text{eff}}(r) = \frac{B}{r^2} + \frac{1}{2} k r^2,$$

où B est une constante positive dont on précisera la valeur en fonction de m et C .

5. Représenter schématiquement E_p^{eff} en fonction de r .

Montrer que E_p^{eff} admet un minimum unique E_1 à une distance r_1 . Exprimer E_1 et r_1 en fonction de m , C et k .

6. On suppose que $E_m > E_1$.

a. Comparer E_m à $E_p^{\text{eff}}(r)$ et en déduire que la distance r est comprise entre un minimum $r_{\min}$ et un maximum $r_{\max}$ que l'on exprimera en fonction de E_m , E_1 et k (on aura intérêt à poser $R = r^2$).

b. On adopte les conditions initiales de la question A.4 et l'on suppose que $x_0 > v_0 \sqrt{m/k}$.

Calculer C , E_1 et E_m en fonction de m , x_0 , v_0 et k .

En déduire $r_{\min}$ et $r_{\max}$ en fonction de m , x_0 , v_0 et k , et vérifier que les longueurs des demi-axes trouvées à la question A.4.b sont cohérentes avec $r_{\min}$ et $r_{\max}$.

Partie C

On cherche dans cette partie à réaliser un dispositif reproduisant le système étudié dans les parties A et B.

Le point M est posé sur un plan horizontal très lisse et est attaché à quatre ressorts rectilignes horizontaux identiques, de raideur k_0 et de longueur à vide ℓ_0 . Chaque ressort n° i ($1 \leq i \leq 4$) est relié à son autre extrémité à un sommet A_i d'un carré. Les coordonnées cartésiennes des points A_i dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont les suivantes: $A_1(+\ell_0, 0)$; $A_2(0, +\ell_0)$; $A_3(-\ell_0, 0)$; $A_4(0, -\ell_0)$.

1. Quelles sont les autres forces exercées sur M ? Travaillent-elles quand M se déplace?
2.
 - a. Exprimer l'énergie potentielle $E_{p,i}$ du ressort n° i en fonction de sa longueur ℓ_i .
 - b. Écrire l'énergie potentielle $E_{p,i}$ de chacun des ressorts en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y) de M , de k_0 et ℓ_0 .
3.
 - a. On supposera désormais que M reste au voisinage de O , c'est-à-dire que $|x| \ll \ell_0$ et $|y| \ll \ell_0$.

On rappelle que

$$\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} \quad \text{si } |u| \ll 1.$$

Montrer que, au deuxième ordre en x et y ,

$$E_{p,1} \approx \frac{1}{2} k_0 x^2.$$

- b. En déduire, sans faire d'autre développement limité, l'expression approchée des énergies potentielles des trois autres ressorts (on pourra comparer l'expression exacte de leurs énergies potentielles à celle de $E_{p,1}$ et faire un changement de variable approprié).
4. Montrer que, au deuxième ordre en x et y , l'énergie potentielle totale de M est bien de la forme

$$E_p \approx \frac{1}{2} k \cdot (x^2 + y^2),$$

où k est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.