Université Pierre et Marie Curie   Année universitaire 2005-2006

UE LP 102 « physique du mouvement »

Examen du 5 septembre 2006

Durée : 2 h

L'utilisation de calculatrices ou de documents n'est pas autorisée.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

A – Question de cours : collisions

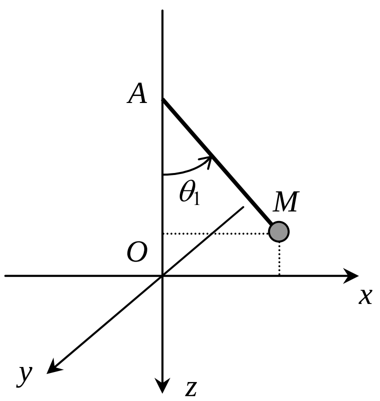
On étudie, dans le cadre de la mécanique classique, la collision de deux corps constituant un système isolé.

1. Selon la nature du choc, quelles sont *toutes* les quantités qui se conservent ?
2. Écrire les équations correspondantes en fonction des vitesses.
3. Qu'appelle-t-on référentiel du centre de masse (ou référentiel barycentrique) ?

B – Problème : le pendule en 3 dimensions

On considère un pendule constitué d'un point *M*, de masse *m*, attaché à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible, de longueur ℓ et de masse négligeable, dont l'extrémité supérieure est fixée en un point *A*. On étudie le mouvement de *M* dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Dans le repère cartésien (O, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), lié au sol et dont l'axe *Oz* est dirigé vers le bas, *A* a pour coordonnées (0, 0, $-\ell$) et *M* a pour coordonnées (x, y, z). On supposera que le fil est toujours tendu et que le champ de pesanteur $\vec{g} = g\,\vec{u}_z$ est uniforme.

1. On considère d'abord le mouvement de ce pendule dans le plan vertical *xOz*. La position de *M* est repérée par ses coordonnées dans le repère cylindrique (A, $\vec{u}_{\rho_1}$, $\vec{u}_{\theta_1}$, $\vec{u}_y$) : $\rho_1 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$; $\theta_1(t) = (\vec{u}_z, \overrightarrow{AM})$; $y_1 = 0$. À l'instant $t = 0$, le pendule est abandonné sans vitesse initiale d'un angle $\theta_1(0) = \theta_0$.



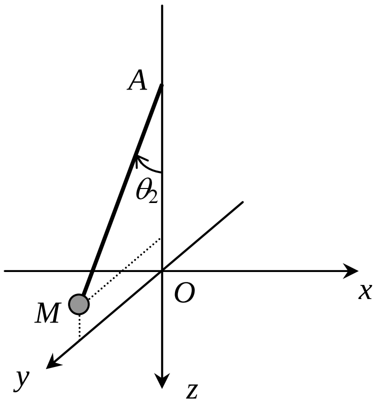
a) Faire un bilan des forces qui s'exercent sur *M* et exprimer leurs composantes dans le repère cylindrique (A, $\vec{u}_{\rho_1}$, $\vec{u}_{\theta_1}$, $\vec{u}_y$).

b) Déterminer l'équation du mouvement dans le plan *xOz* en coordonnées polaires (ρ_1, θ_1) à partir de la deuxième loi de Newton.

c) Quelle est l'équation horaire $\theta_1(t)$ de *M* dans le cas des petites oscillations?

d) En se limitant à l'ordre 1 du développement limité en θ_1, écrire, dans le cas des petites oscillations, les équations horaires $x_1(t)$ et $z_1(t)$ de *M*.

2. On considère maintenant le mouvement de ce pendule dans le plan vertical yOz. La position de M est repérée par ses coordonnées dans le repère cylindrique (A, $\vec{u}_{\rho_2}$, $\vec{u}_{\theta_2}$, $\vec{u}_x$) : $\rho_2 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$; $\theta_2(t) = (\vec{u}_z, \overrightarrow{AM})$; $x_2 = 0$. À l'instant $t = 0$, le pendule est vertical et est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\, \vec{u}_y$.



a) Faire un bilan des forces qui s'exercent sur M et exprimer leurs composantes dans le repère cylindrique (A, $\vec{u}_{\rho_2}$, $\vec{u}_{\theta_2}$, $\vec{u}_x$).

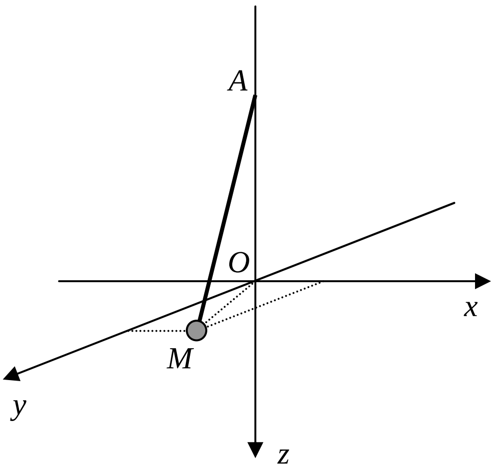
b) Calculer le moment cinétique de M par rapport à A dans ce repère. Déterminer l'équation du mouvement dans le plan yOz en coordonnées polaires (ρ_2, θ_2) à partir du théorème du moment cinétique.

c) Quelle est l'équation horaire $\theta_2(t)$ de M, dans le cas des petites oscillations ?

d) En se limitant à l'ordre 1 du développement limité en θ_2, écrire, dans le cas des petites oscillations, les équations horaires $y_2(t)$ et $z_2(t)$ de M.

3. Un point mobile M de masse m a un mouvement régi par les équations suivantes :

$$x(t) \approx \alpha \cos(\omega t),$$
$$y(t) \approx \beta \sin(\omega t),$$
$$z(t) \approx 0.$$



a) Montrer que ce mouvement peut être celui du pendule précédent autour de la verticale dans le cas des petits angles. Quelle doit être la valeur de ω pour que ce soit vrai ? Quelles sont alors les conditions imposées à α et β ?

b) Quelle est la nature de la trajectoire de M ?

c) Quelles étaient les conditions initiales ($t = 0$) ?

d) Calculer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M. Montrer que ce dernier peut se mettre sous la forme $\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$.

e) Calculer le moment cinétique de M par rapport à O, puis par rapport à A, en coordonnées cartésiennes.

f) Calculer le moment, par rapport à O, puis par rapport à A, de la résultante, déterminée à partir de $\vec{a}$, des forces exercées sur M.

g) Vérifier le théorème du moment cinétique, par rapport à O, puis par rapport à A.