Université Pierre et Marie Curie. | **LP102.**
Année universitaire 2007/2008 | **1re session**

Examen du 27 mai 2008

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

On exprimera toujours les résultats sous forme littérale avant d'effectuer, si elles sont demandées, les applications numériques. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours : changement de référentiel

1. On considère deux référentiels, R et R', d'origines respectives O et O', *en translation* l'un par rapport à l'autre.

   Rappeler, dans ce cas particulier, l'expression vectorielle de la vitesse et de l'accélération d'un point M dans R en fonction du mouvement de M dans R' et du mouvement de R' par rapport à R. Nommer les différents termes apparaissant dans ces relations (lois de composition des vitesses et des accélérations).
2. On suppose désormais que R', outre son mouvement de translation, a un mouvement de rotation par rapport à R. Les termes nommés à la question 1 sont modifiés et un nouveau terme apparaît pour l'accélération.

   Comment s'appelle-t-il et de quoi dépend-il ? Réécrire la loi de composition des accélérations en fonction de ce nouveau terme et de ceux nommés à la question 1 (on ne demande pas leur expression en fonction du vecteur rotation de R' par rapport à R).
3. On suppose que R est galiléen et que le point matériel M, de masse m, est soumis à des forces d'interaction de résultante $\vec{F}$.

   Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans R' et nommer les forces qui apparaissent. Exprimer ces dernières en fonction des termes nommés aux questions 1 et 2.

Problème : bricolage spatial

Deux vaisseaux spatiaux, C et B, de masse m_0 chacun, décrivent la même orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre dans le plan équatorial de celle-ci. Le vaisseau B suit C à une distance constante, dont la valeur mesurée le long de l'orbite est $2\ \pi\ r_0\ \lambda$ (avec $0 < \lambda < 1$).

Lorsque son vaisseau est au point Q, un astronaute de B, Benoît, lance un marteau M, de masse m, de manière à ce que celui-ci soit récupéré *au même point* Q par un astronaute du vaisseau C, Claire. Pour faciliter la réception, le marteau est envoyé par Benoît *tangentiellement* à l'orbite de B (les vitesses de B et M sont donc parallèles lors du lancement). L'objet du problème est de déterminer dans quel *sens* et avec quelle vitesse le marteau doit être lancé.

Hormis à la question III.3.*d*, on se placera dans le référentiel géocentrique (référentiel ayant pour origine le centre O de la Terre et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines), que l'on supposera galiléen. Les forces gravitationnelles exercées par la Terre sur les vaisseaux et sur le marteau sont les seules forces que l'on considérera.

Notations et données numériques :

• masse de la Terre : M_T ; • rayon de la Terre : $R_\mathrm{T} = 6\,400\,\mathrm{km}$; • constante de gravitation : G.

I. Orbite des vaisseaux

1. Montrer que la norme v_0 de la vitesse des vaisseaux sur l'orbite circulaire est constante. Exprimer v_0 en fonction des données du problème.

2. En déduire la période de révolution T_0 des vaisseaux.
3. À quelle condition sur r_0 l'orbite est-elle géostationnaire (c'est-à-dire que le vaisseau reste à la verticale du même point de l'équateur terrestre) ?

   Application numérique. Si le vaisseau était sur une orbite circulaire basse, à une altitude $h = 200\,\mathrm{km}$ au-dessus de la surface terrestre, il mettrait un temps $\tau = 1\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}$ pour faire un tour. En déduire la valeur de r_0 pour une orbite géostationnaire (on donne $2^{2/3} \approx 1{,}6$).

   On adoptera cette valeur de r_0 par la suite.

II. Orbite du marteau

1. Montrer que, entre son lancement et sa récupération, le moment cinétique du marteau par rapport à O est constant. Dans quel plan le marteau se déplace-t-il ?
2. Quelles sont les trajectoires possibles pour un corps soumis seulement à la force de gravitation exercée par la Terre ?

   Quelle doit-être la forme de la trajectoire du marteau pour que Claire puisse le saisir en Q ? Peut-elle être circulaire ? Le point Q est-il un point particulier de l'orbite du marteau ?
3. Représenter de manière schématique, pour une orbite elliptique suffisamment allongée, le périgée (P), l'apogée (A), les foyers, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération en P, A et en un point quelconque.
4. On pose $r_P = \|\overrightarrow{OP}\|$, $r_A = \|\overrightarrow{OA}\|$ et l'on note v_P et v_A les normes des vitesses en P et A.

   Établir une relation entre r_P, r_A, v_P et v_A.
5. À l'aide de la troisième loi de Kepler, exprimer la période T de révolution du marteau en fonction de son demi-grand-axe a, de r_0 et T_0.
6. En écrivant la conservation de l'énergie mécanique E du marteau entre l'apogée et le périgée ainsi que celle du moment cinétique aux mêmes points, calculer v_A^2 en fonction de r_A, r_P et des données du problème.

   En déduire que $E = -G\ M_\mathrm{T}\ m/(2\ a)$.
7. Quelle doit être la valeur minimale a_min du demi-grand-axe pour que le marteau ne percute pas la Terre au cours d'une révolution ?

   Application numérique. Calculer a_min.

III. Lancement et réception du marteau

Lorsque Claire attrape le marteau en Q, celui-ci a effectué n révolutions autour de O depuis son lancement ; le vaisseau C a alors fait n_0 tours complets plus une fraction de tour.

1. Quelle relation a-t-on entre n_0, n, T_0, T et λ ?
2. En déduire le demi-grand-axe de l'orbite du marteau en fonction de n_0, n, r_0 et λ.
3. Claire doit recevoir le marteau le plus vite possible. On suppose que la valeur de λ est telle qu'elle peut le saisir au premier passage de son vaisseau en Q.
   - *a.* En déduire que $a < r_0$. Quelle est la nature du point Q ?
   - *b.* Dans quel intervalle de λ le marteau ne rencontre-t-il pas la Terre ? (On exprimera la borne supérieure, λ_max, en fonction de a_min et r_0.)

     Application numérique. Calculer une valeur approchée de λ_max (on donne $(4/7)^{3/2} \approx 0{,}43$).
   - *c.* On note v_Q la norme de la vitesse du marteau dans le référentiel géocentrique lors de son lancement. En utilisant le résultat de la question II.6, calculer v_Q en fonction de G, M_T, r_0 et a.

     Dans quel sens (par rapport au mouvement du vaisseau B) le marteau doit-il être lancé ?

     Application numérique. On a $\lambda = 61/125$. Calculer a/r_0 si $n = 1$, puis une valeur approchée de v_Q/v_0 (on donne $\sqrt{7} \approx 2{,}6$).
   - *d.* On note v'_Q la norme de la vitesse du marteau dans le référentiel du vaisseau B lors de son lancement. Quelles sont les valeurs possibles de v'_Q en fonction de v_0 et v_Q ?
4. **Question hors barème.**

   La valeur de λ ne permet pas à Claire d'attraper le marteau la première fois que son vaisseau passe en Q.

   Montrer qu'elle peut toujours le saisir au deuxième passage de son vaisseau en Q et en un ou deux tours au plus du marteau. Préciser la nature de Q dans chacun des cas.