

Examen du 16 juin 2008

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Jeu de ballon.

*Il est fortement recommandé de faire des schémas des situations physiques rencontrées.
Les parties I et II sont indépendantes.*

Deux adolescents, Antoine et Claire, jouent au ballon. Antoine est assis à l'extrémité d'un ponton, et Claire est debout dans une barque sur un lac. A l'instant initial, les deux joueurs sont immobiles, se font face, à la même altitude, et Antoine tient un ballon dans ses mains. Dans la suite du problème, Antoine et Claire échangent le ballon. Antoine étant assis sur le ponton, il restera immobile durant tout le jeu. En revanche, à cause de l'échange du ballon entre les deux joueurs, la barque sur laquelle se tient Claire va se mettre en mouvement.

On notera m la masse du ballon, et M la masse de l'ensemble « Claire + barque ». On négligera les frottements de l'eau sur la barque, qui sera donc considérée comme un système isolé. On notera R le référentiel terrestre, lié au ponton. Ce référentiel sera supposé galiléen. On notera R' le référentiel lié à la barque.

On suppose que la vitesse du ballon reste constante et horizontale au cours de son mouvement, suivant un axe Ox orienté de Antoine vers Claire (le vecteur de base étant noté \vec{u}_x ou \vec{e}_x). Cette hypothèse est réaliste si la distance entre les deux joueurs n'est pas trop grande.

1. Premier échange de ballon entre les joueurs :

- a. Antoine lance le ballon vers Claire avec une vitesse $\vec{w}_0 = w_0 \vec{u}_x$. Claire réceptionne le ballon, et on constate que la barque se met en mouvement avec une vitesse \vec{V} dans le référentiel R .
 - i. Quelle quantité se conserve au cours du choc ? Pourquoi ?
 - ii. En déduire l'expression de \vec{V} en fonction de \vec{w}_0 , m et M .
- b. Claire lance alors le ballon vers Antoine, avec une vitesse $-\vec{w}_0$ dans le référentiel R' de la barque de vitesse \vec{V}_1 à la fin de ce lancer.
 - i. Exprimer la vitesse \vec{v}_B du ballon dans le référentiel R
 - ii. En écrivant la conservation de la quantité de mouvement au cours du lancer, donner une relation liant \vec{v}_B , \vec{V}_1 , \vec{V} , m et M , puis liant \vec{w}_0 , \vec{V}_1 , \vec{V} , m et M .
 - iii. Déduire des questions précédentes que : $2m\vec{w}_0 = (m + M)\vec{V}_1$.
- c. On reprend ce premier échange en considérant, cette fois, comme *une seule collision* la réception du ballon par Claire suivie du lancer vers Antoine. Ecrire la conservation de la quantité de mouvement durant la collision, en utilisant

l'expression de \vec{v}_B trouvée plus haut. Montrer que l'on retrouve alors la relation liant \vec{w}_0 et \vec{V}_1 trouvée à la question précédente.

2. Antoine réceptionne le ballon lancé par Claire, et le relance vers Claire avec la vitesse $\vec{w}_0 = w_0 \vec{u}_x$. On considère comme *une seule collision* la réception du ballon par Claire suivie du lancer vers Antoine, à la vitesse $-\vec{w}_0$ dans R' . On note \vec{V}_2 la vitesse de la barque après cette collision, qui est donc la vitesse du référentiel R' par rapport au référentiel R .
 - a. Donner la vitesse \vec{v}_{B2} du ballon, après la collision, dans le référentiel R .
 - b. Ecrire la conservation de la quantité de mouvement durant la collision, en déduire la relation liant \vec{w}_0 , \vec{V}_1 , \vec{V}_2 , m et M .
 - c. Déterminer \vec{V}_2 en fonction de \vec{w}_0 , m et M .
3. Les échanges de ballon entre Antoine et Claire se poursuivent. On appelle \vec{V}_{n+1} la vitesse de la barque après le $(n+1)^{\text{ième}}$ échange.
 - a. En considérant l'échange $(n+1)$, montrer que : $2m\vec{w}_0 + M\vec{V}_n = (m+M)\vec{V}_{n+1}$.
 - b. On se place dans l'hypothèse où $m \ll M$. Donner l'expression simplifiée de \vec{V}_{n+1} en fonction de \vec{V}_n , \vec{w}_0 , et du rapport m/M .
 - c. En déduire que : $\vec{V}_{n+1} = 2(n+1)\vec{w}_0 \frac{m}{M}$, dans l'hypothèse $m \ll M$.
4. On appelle d_{n+1} la distance de Claire à Antoine à l'instant t_{n+1} du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer de Claire, entre les instants t_n et t_{n+1} . On appelle t'_n l'instant compris entre t_n et t_{n+1} du lancer d'Antoine.
 - a. Quelle distance parcourt la barque ?
 - b. Quelle distance parcourt le ballon entre t_n et t'_n puis entre t'_n et t_{n+1} ?
 - c. Montrer que d_{n+1} s'écrit en fonction de d_n :

$$d_{n+1} = d_n \left(\frac{w_0}{w_0 - V_n} \right)^2$$
 - d. Montrer qu'en utilisant l'approximation $m \ll M$ on obtient :

$$d_{n+1} \approx d_n \left[1 + 4n \frac{m}{M} \right]$$
 - e. En déduire la relation entre t_{n+1} et t_n suivante :

$$t_{n+1} - t_n \approx \frac{2d_n}{w_0}$$
5. Montrer que le processus de lancers peut être assimilé à une interaction entre « A » et « C » ; préciser si celle-ci est attractive ou répulsive.

II- La distance est maintenant trop grande pour qu'on puisse négliger l'effet de la pesanteur sur le ballon. On négligera cependant la résistance de l'air. On choisira un axe des z vertical orienté vers le haut. On appellera \vec{g} le champ de la pesanteur.

1. Donner l'équation de la trajectoire du ballon entre Antoine et Claire si le ballon est lancé avec un angle α avec la verticale.
2. Déterminer l'angle α , auquel Antoine doit lancer le ballon à l'instant t pour que Claire puisse le recevoir à la bonne hauteur si la distance entre les deux adolescents est D ?

3. A partir de quelle distance, le jeu devra-t-il s'arrêter ? (la distance D entre les deux adolescents est trop grande pour que le ballon lancé à la vitesse \vec{w}_0 par Antoine puisse atteindre Claire.)

Question de cours : les oscillateurs harmoniques

1. Donner l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur libre non amorti. Donner la forme générale de l'équation horaire du mouvement.
2. Donner l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur libre amorti, dans le cas d'un amortissement fluide proportionnel à la vitesse. Donner la forme générale de l'équation horaire de ce mouvement. Expliciter les différents cas.
3. Donner l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti excité à la fréquence ω . Qu'est-ce que le phénomène de résonance?
4. Donner trois exemples d'oscillateurs mécaniques