Université Pierre et Marie Curie — Année 2006-2007

Cycle d'intégration L1

UE LP 102 Physique du mouvement

Examen du 18 juin 2007

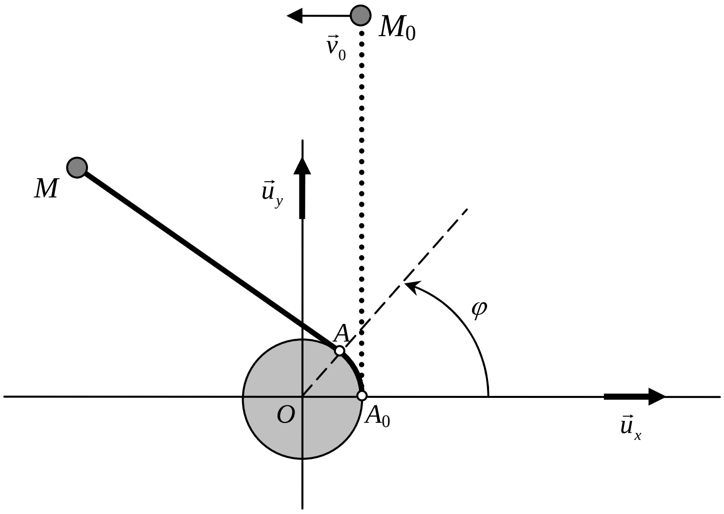
Durée de l'épreuve : 2h.
Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Un fil inextensible, supposé infiniment fin et sans masse, de longueur ℓ_0, est fixé en un point A_0 d'un disque circulaire fixe de centre O et de rayon a. À l'autre extrémité du fil, en M, est attachée une masse supposée ponctuelle m. À un instant quelconque, une partie A_0A du fil est enroulée sur le disque (A_0A est donc un arc de cercle et peut correspondre à plusieurs tours) ; la partie non encore enroulée et tendue, AM, est tangente en A au disque (voir figure). On appelle φ l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA}\right)$. On choisit un système d'axes repérés par les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ dans la direction de $\overrightarrow{OA_0}$ et $\vec{u}_y$ orthogonal à $\vec{u}_x$ tourné dans le sens des φ croissants. Le disque est dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On appellera $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire orthogonal au plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ tel que le trièdre $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit direct. Le champ de pesanteur uniforme est $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Le point M a pour coordonnées x et y.

À l'instant $t = 0$, le fil est complètement déroulé. Il est tangent en A_0 au disque : le segment A_0M_0, où M_0 est la position initiale de M, est donc parallèle à l'axe $\vec{u}_y$ (voir figure). On donne à la masse m une vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à A_0M_0 et suffisante pour que le fil reste tendu jusqu'à enroulement complet autour du disque. On a $\vec{v}_0 = -v_0\,\vec{u}_x$.

On négligera les effets de la pesanteur.

Le problème sera plus aisé à résoudre si on utilise comme variable la longueur $\ell = AM$ de fil non encore enroulé. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen. On donne les valeurs suivantes : $\ell_0 = 2\,\text{m}$, $a = 2\,\text{cm}$, $v_0 = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1 – À quelles conditions peut-on estimer que le référentiel du laboratoire est galiléen ?

2 – Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AM}$. En déduire les coordonnées *x* et *y* de *M* en fonction de *a*, ℓ et φ.

3 – Exprimer ℓ en fonction de ℓ_0, *a* et φ. En déduire une relation entre $\dfrac{d\ell}{dt}$ et $\dfrac{d\varphi}{dt}$.

4 – Exprimer les dérivées $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$ en fonction de ℓ, $\dfrac{d\ell}{dt}$, *a* et φ.

5 – En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_C de la masse *m* en fonction de *m*, ℓ, $\dfrac{d\ell}{dt}$ et *a*.

6 – Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse *m* ? Toujours dans l'hypothèse où le poids est négligeable, calculer la puissance des forces autres que la pesanteur et montrer que l'énergie cinétique reste constante.

7 – Exprimer la norme *T* de la tension du fil en fonction de *m*, ℓ, $\dfrac{d\ell}{dt}$ et *a*.

8 – Montrer que la condition d'énergie cinétique constante aboutit à l'équation différentielle $\dfrac{d}{dt}\left(\ell\dfrac{d\ell}{dt}\right)=0$.

9 – Quelle est la valeur initiale E_{C0} de E_C ? En utilisant la valeur initiale de ℓ, déduire la valeur initiale de $\left(\dfrac{d\ell}{dt}\right)_0$. Quel est le signe de $\left(\dfrac{d\ell}{dt}\right)_0$?

10 – En intégrant l'équation différentielle de la question 8, montrer que l'on trouve $\ell(t)=\sqrt{\ell_0^2-2\,a\,v_0\,t}$.

11 – À quel instant t_M le fil sera-t-il complètement enroulé ? Calculer numériquement t_M. Quel sera le nombre *n* de tours du fil autour du disque ? Calculer numériquement *n*.

12 – Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la masse *m* par rapport au point *O*, d'abord en fonction des coordonnées *x* et *y* et de leurs dérivées temporelles, puis en fonction de *m*, ℓ, $\dfrac{d\ell}{dt}$ et *a*.

13 – Exprimer le moment par rapport au point *O* des forces agissant sur la masse *m* en fonction de *m*, ℓ, $\dfrac{d\ell}{dt}$ et *a*.

14 – Par application du théorème du moment cinétique, montrer que l'on retrouve l'équation obtenue en 8.

15 – Exprimer $\vec{L}_O(t)$ en fonction de *m*, ℓ_0, *a*, v_0 et *t*. Que devient cette expression pour t_M ?

16 – Exprimer $T(t)$ en fonction de *m*, ℓ_0, *a* et v_0. Que valent $T(t=0)$ et $T(t=t_M)$? Que peut-on en conclure sur l'hypothèse du poids négligeable ? Pour cela, calculer *mg/T*. Pourra-t-on atteindre t_M ?

Le problème est une modélisation du jeu appelé « spiroball » : celui-ci consiste à enrouler autour d'un mât vertical un fil auquel on a attaché à l'une de ses extrémités une balle de tennis et dont l'autre extrémité est fixée au mât. Deux joueurs, placés de façon diamétralement opposée par rapport au mât, sont munis chacun d'une raquette et font tourner la balle chacun dans un sens.