Université Pierre et Marie Curie Année 2005-2006
Licence de Sciences et Technologies
Cycle d'intégration L1
LP 102 : physique du mouvement

Examen de physique.

21 juin 2006 - Durée : 2 heures

◇ *Lire attentivement l'énoncé de chaque question et bien numéroter les réponses.*

◇ *On accordera la plus grande attention à la rédaction et à l'argumentation des réponses, même aux questions qualitatives.*

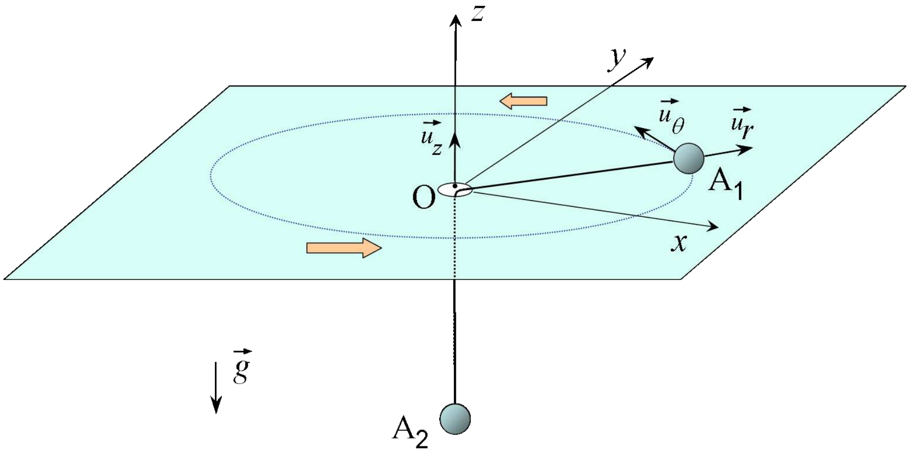
◇ *L'usage des documents et calculatrices est interdit. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.*

I. Questions de cours

1. Énoncer les trois lois fondamentales de Newton dans le cadre de la mécanique du point matériel.
2. Énoncer les trois lois de Kepler.

II. Un mouvement à force centrale

Deux boules (1 et 2), assimilables à des points matériels de masses m_1 et m_2, sont reliées par un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable. La boule 1 se meut sur une table parfaitement horizontale et lisse alors que la boule 2 reste suspendue sur une ligne verticale, le fil passant par un petit trou situé en O (voir figure). Le fil est tendu en permanence et on admettra, dans tout le problème, que les tensions agissant sur chaque boule ont la même norme : $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$. Les frottements seront négligés.



Le mouvement des boules est observé dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, et muni d'un système de coordonnées d'origine O (voir figure). La position de la boule 1 est repérée par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$. On notera r et θ les coordonnées polaires du point A_1 et z l'altitude du point A_2.

1. Quelle relation a-t-on entre r et z ? En déduire que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \; .$$

A. *Système libéré sans vitesse initiale.*

Un opérateur retient la boule 1 en une position fixe sur la table à une distance r_0 de O, puis la lâche à $t = 0$ sans apporter de vitesse initiale au système.

2. Faire l'inventaire des forces appliquées aux deux boules à $t > 0$ et donner leur expression.

3. En utilisant la loi de Newton appropriée, exprimer les accélérations de chacune des boules, $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, en fonction de m_1, m_2, et g.

   Donner l'expression de T.

4. Commenter les cas $m_1 \ll m_2$, $m_1 = m_2$ et $m_1 \gg m_2$.

B. *Système en rotation.*

La boule 1 est maintenant animée d'un mouvement circulaire de rayon $r = r_0$, alors que la boule 2 reste immobile.

5. Calculer, en coordonnées cylindriques, les tensions $\vec{T}_2$ puis $\vec{T}_1$ agissant sur les boules.

   La force $\vec{T}_1$ est-elle centrale ? Justifier votre réponse.

6. Montrer que le moment cinétique de la boule 1 par rapport à O, $\vec{L}_\mathrm{O}$, est un vecteur constant.

7. En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer $\vec{L}_\mathrm{O}$. Obtenir une expression pour la vitesse angulaire, $d\theta/dt = \omega$, de la boule 1 et montrer qu'elle est constante.

8. Projeter la deuxième loi de Newton (ou relation fondamentale de la dynamique) appliquée à la boule 1 sur la direction radiale et exprimer la vitesse angulaire en fonction de m_1, m_2, g et r_0.

C. *Système perturbé.*

Un opérateur perturbe le système précédent (partie B) en tapant *légèrement* sur la boule 2 dans la direction verticale. Le mouvement est tel que le rayon varie faiblement autour de sa valeur initiale de r_0. On admettra que le moment cinétique reste inchangé par rapport au B. En revanche, la norme de la tension n'est plus constante au cours du temps.

9. En appliquant la deuxième loi de Newton aux boules 1 et 2, établir les équations décrivant le mouvement radial de la boule 1 (cf. § 8) et le mouvement vertical de la boule 2 dans le cas plus général où r et $d\theta/dt$ ne sont pas des constantes.

   Montrer qu'on obtient l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} - A\, r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -B \; ,$$

   où l'on précisera les constantes A et B.

10. Éliminer la variable $d\theta/dt$ grâce à l'équation du moment cinétique (cf. § 7) et obtenir une équation différentielle de la forme $f(r, d^2r/dt^2) =$ constante.

11. En posant $r(t) = r_0 + \delta r(t)$, avec $|\delta r(t)| \ll r_0$, trouver une approximation de l'équation radiale valide au premier ordre en $\delta r/r_0$.

    On rappelle que $(1+x)^p = 1 + p\,x + \ldots$, si $\mid x \mid < 1$.

12. Décrire qualitativement le mouvement radial et indiquer la période correspondante. La comparer à $2\,\pi/\omega$.

13. Tracer qualitativement la trajectoire dans le cas $m_1 \gg m_2$.