Université Pierre et Marie Curie **Année Universitaire 2008-2009**

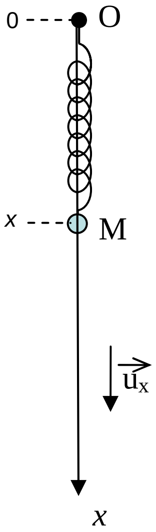
UE LP101
(Matière et énergie)

Examen 1ère session 12 décembre 2008 durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite. Les téléphones doivent être éteints et rangés dans les sacs.
De nombreuses questions sont indépendantes, l'étudiant-e est donc encouragé-e à lire l'ensemble du sujet avant de commencer à le traiter.

I- Mécanique : Le pendule fou (37 points)

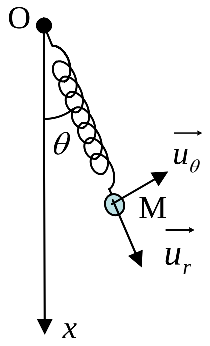
On considère un pendule constitué d'une masse *m* fixée à l'extrémité libre M d'un ressort, dont l'autre extrémité est fixée à un point O fixe pris comme origine des coordonnées. Le ressort, de masse négligeable devant *m*, a une longueur à vide ℓ_0 et une constante de raideur *k*.



L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre $\vec{g}$. On supposera les frottements négligeables (sauf dans la question 1-g).

1. Dans un premier temps, le ressort est vertical, on considère le mouvement à une dimension le long de l'axe (O*x*) **dirigé vers le bas**. Le vecteur unitaire correspondant $\vec{u}_x$ a été précisé sur la figure ci-contre.
   a) Quelles sont les expressions des forces qui s'exercent sur la masse *m* lorsque celle-ci se trouve en un point d'abscisse *x* ?
   b) Pour chacune de ces forces, établir, à une constante près, l'expression de l'énergie potentielle dont elle dérive. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ à une constante *C* près.
   c) Tracer l'allure du graphe de chacune des contributions ainsi que l'allure du graphe de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$.
   d) Justifier par un raisonnement physique le sens de variation de chacune des contributions.
   e) Existe-t-il une position d'équilibre ? Si oui, déterminer sa position x_e et l'indiquer sur le graphe. Discuter la stabilité de cet équilibre.
   f) Initialement la masse est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $x = \ell_0$. Décrire le mouvement de la masse *m*. Indiquer sur un nouveau graphe de $E_p(x)$ le point $x = \ell_0$, la valeur de l'énergie mécanique correspondante, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en un point d'abscisse *x* du mouvement.
   g) Les frottements ne sont plus négligeables, décrire le mouvement de la masse *m*. Schématiser l'évolution de l'énergie mécanique sur un nouveau graphe de $E_p(x)$.
   h) En prenant comme référence d'énergie potentielle, l'énergie potentielle à la position d'équilibre x_e ($E_p(x_e) = 0$), déterminer la constante *C* de la question b).

2. La masse peut maintenant se mouvoir dans un plan vertical contenant l'axe (Ox) et sa position est repérée dans ce plan par le point M de coordonnées polaires (r, θ).



a) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m ? Donner leurs expressions en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

b) Exprimer l'énergie potentielle dont dérive chacune des forces en fonction de r et de θ. Montrer que l'énergie potentielle totale s'écrit à une constante près :

$$-mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$$

c) En utilisant la relation vectorielle force–énergie potentielle, déterminer les composantes F_r et F_θ de la résultante des forces exercées sur la masse m. Montrer que l'on retrouve bien les forces déterminées en 2-a.

On rappelle les composantes en coordonnées polaires de l'opérateur vectoriel gradient d'une fonction f(r,θ) : $\frac{\partial f}{\partial r}$ *suivant* $\vec{u}_r$ *et* $\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ *suivant* $\vec{u}_\theta$.

d) On se place à $r = R = cte$. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

II-Hydrostatique et Hydrodynamique

<u>Questions de cours (8 points) :</u>

1) Donner les dimensions **et** les unités SI d'une pression P et d'une masse volumique ρ.
2) Rappeler sans démonstration la loi fondamentale de la statique des fluides reliant la variation de la pression dP à la variation de l'altitude dz au sein d'un fluide de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur de la Terre.
3) Dans le cas d'un fluide incompressible, écrire l'expression reliant P à z.
4) Si on a un fluide incompressible, non visqueux en mouvement laminaire et permanent dans le champ de pesanteur, avec $\vec{v}(M)$ le champ de vitesse correspondant, donner sans démonstration la quantité invariante en tout point de ce fluide (Théorème de Bernoulli). Préciser sa dimension.

Le thermomètre de Galilée (15 points)

Six petites sphères de verre sont immergées dans un liquide incompressible (L), contenu dans un cylindre fermé. Le volume total de liquide (L) est *V*, la masse totale de liquide est M_L.
Les sphères, numérotées par un indice *i* ($i = 1,2,...,6$), ont le même volume $v_0 = 4\ cm^3$ et la même masse à vide $m_0 = 2\ g$, mais chacune contient une masse différente m_i d'alcool de couleur différente permettant son identification.

1. Donner la masse M_i de la sphère *i* et sa masse volumique moyenne ρ_i.
2. On repère l'altitude d'un point au sein du fluide (L) par un axe vertical (O*z*) à partir du fond du récipient. Expliciter les forces s'appliquant sur une sphère immergée dans le liquide (L) à une profondeur intermédiaire (*« entre deux eaux »*). Faire le bilan de ces forces et distinguer les trois cas d'évolution possibles.
3. Montrer que si la sphère est à l'équilibre à une altitude *z*, elle l'est aussi à l'altitude $z' \neq z$ tant qu'elle est complètement immergée sans contact avec le fond (*cet équilibre à une profondeur intermédiaire quelconque est appelé équilibre indifférent*).

Le volume *V* du liquide (L) dépend de la température *T*, selon la loi $V(T) = V_{18}\left[1 + \alpha(T - 18)\right]$, *T* étant exprimée en °C et $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-3}$ °C^{-1}. A 18°C, la masse volumique du liquide (L) est $\rho_L(18) = 0{,}8 \times 10^3\ \ SI$.

4. Exprimer la masse volumique $\rho_L(T)$ du liquide (L) en fonction de la température *T*. On pourra utiliser une forme approchée $(1+\varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ valable pour ε très petit devant 1.
5. La sphère 1 ($i = 1$) est telle qu'elle est en équilibre indifférent pour $T = 18°C$. Déterminer la masse m_1 d'alcool contenue dans la sphère 1 en fonction des paramètres du problème. Faire l'application numérique (A.N.).
6. A $T = 20°C$ à quelle altitude se trouvera la sphère 1 ?
7. La sphère 2 est construite pour être en équilibre indifférent à $T = 20°C$. Quelle doit être la masse m_2 ? Effectuer l'A.N. Quelle est la masse la plus grande, m_1 ou m_2 ?
8. A $T = 18°C$, où se trouvera la sphère 2 ?
9. Comment peut-on lire la température avec ce système ?