

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à l'aide de la fonction

$$f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{3}$$

par

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^3}{3}$$

et la donnée de u_0 strictement positif

1. Étudier les variations et le signe de la fonction auxiliaire g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x .$$

2. Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?
3. Discuter suivant la valeur initiale u_0 de la suite, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.