

Examen de mathématiques 1
Septembre 2002

Corrigé de l'examen et remarques

Exercice 5

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 4, tels que $P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 6$ et $P(0) = 1$

Le fait de connaître la valeur de dérivées successives en 1 incite à utiliser la formule de Taylor en 1.

Puisque P est de degré au plus 4 on a l'égalité

$$P = P(1) + (X-1)P'(1) + \frac{(X-1)^2}{2}P''(1) + \frac{(X-1)^3}{6}P'''(1) + \frac{(X-1)^4}{24}P^{(4)}(1)$$

Posant $P^{(4)}(1) = a$ et tenant compte des valeurs indiquées dans l'énoncé :

$$P = 6 + (X-1)6 + \frac{(X-1)^2}{2}6 + \frac{(X-1)^3}{6}6 + \frac{(X-1)^4}{24}a$$

soit

$$P = 6 + 6(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3 + \frac{(X-1)^4}{24}a$$

Prenant la valeur en 0 :

$$1 = P(0) = 6 - 6 + 3 - 1 + \frac{a}{24}$$

qui donne $a = -24$

On en déduit que

$$P = 6 + 6(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3 - (X-1)^4$$

(réponse acceptée) ou en développant

$$P = 1 + 7X - 6X^2 + 5X^3 - X^4$$

Il y a donc une solution unique.

Remarques

- La recherche des coefficients de P en résolvant un système de 5 équations à 5 inconnues, un peu fastidieuse et longue, permettait d'obtenir tous les points de la question (la perte de temps pénalisait déjà suffisamment).
- Un erreur de logique à éviter : traiter à part le cas des polynômes strictement inférieur à 4 (de degré 3, 2,...). Ce sont des polynômes de degré au plus 4 avec le coefficient du terme X^4 nul, donc s'il y en a on les trouve en résolvant le système ou en appliquant la formule de Taylor et si certains en trouvent c'est parce qu'ils oublient des conditions..

Références dans Université en Ligne

<http://www.uel.education.fr/consultation/reference/index.htm>

- Module sur les polynômes et spécialement la rubrique « apprendre, fonctions polynômes, formule de Taylor, étude des polynômes à coefficients réels ou complexes » [lien](#)
<http://www.uel.education.fr/consultation/reference/mathematiques/polynomes1/apprendre/fa2.32/cours03.htm>
- A la rubrique « s'exercer, fonctions polynômes », un exercice voisin est détaillé avec indications de méthode [lien](#)
<http://www.uel.education.fr/consultation/reference/mathematiques/polynomes1/sexercer/fe2.321/presentation.htm>

Testez sur un exercice analogue si vous avez compris.

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 5, tels que

$$P(0) = P'(0) = 2, P''(0) = P'''(0) = -12, P^{(4)}(0) = 72 \text{ et } P(0) = 2$$

Demandez la réponse (code P02) à l'équipe pédagogique de L'UTÉS ou par mail à <mailto:pedagogie-lutes@upmc.fr>