

Examen de mathématiques 1
Septembre 2002

Corrigé de l'examen et remarques

Exercice 4

1. Chercher le PGCD (noté D) des polynômes suivants

$$A = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$

$$B = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 4$$

On fait la division euclidienne de A par B

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 4 \\ \hline -X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 6X - 4 & 1 \\ \hline & -X^2 + 3X - 2 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 4 & -X^2 + 3X - 2 \\ \hline -X^4 + 3X^3 - 2X^2 & -X^2 - 2 \\ \hline & 2X^2 - 6X + 2 \\ & -2X^2 + 6X - 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est donc $-X^2 + 3X - 2$ et, comme le PGCD est unitaire, $D = X^2 - 3X + 2$.

2. Écrire une relation de Bézout entre A , B et D .

De la première division de la question précédente on déduit que $A = B - D$.

3. Donner une factorisation de A et B en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ puis dans $\mathbf{C}[X]$.

La deuxième division de la première question montre que

$$B = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 2).$$

Une autre division donne

$$A = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)$$

On remarque que

$$D = (X - 2)(X - 1)$$

et comme $X^2 + 1$ et $X^2 + 2$ sont des polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ (de degré 2 à discriminant strictement négatif) on en déduit les factorisations en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$:

$$A = (X^2 + 1)(X - 1)(X - 2)$$

$$B = (X^2 + 2)(X - 1)(X - 2)$$

puis dans $\mathbf{C}[X]$

$$A = (X + i)(X - i)(X - 1)(X - 2)$$

$$B = (X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2})(X - 1)(X - 2)$$

Remarques

- On attendait un algorithme d'Euclide en 1) puis en 3) une factorisation du PGCD (de degré 2 donc on sait en calculer les racines) puis de A et B en factorisant les quotients de degré 2 aussi par D .
- On pouvait aussi repérer des racines évidentes, factoriser - résoudre la question 3) - et en déduire le PGCD - question 1) - .
- De même on pouvait remarquer sans autre formalité que $B = A - D$.

Références dans Université en Ligne

<http://www.uel.education.fr/consultation/reference/index.htm>

Module sur les polynômes et spécialement le chapitre « apprendre, arithmétique dans $K[X]$ »

lien

<http://www.uel.education.fr/consultation/reference/mathematiques/polynomes1/apprendre/fa2.21/presentation.htm>

Testez sur un exercice analogue si vous avez compris.

1. Chercher le PGCD (noté D) des polynômes suivants

$$A = X^5 - X^4 + 4X^3 - 2X^2 + 4X$$

$$B = X^5 + 2X^3$$

2. Écrire une relation de Bézout entre A , B et D .
3. Donner une factorisation de A et B en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ puis dans $\mathbf{C}[X]$.

Demandez la réponse (code P02) à l'équipe pédagogique de L'UTÈS ou par mail à

lutelmaths@cicrp.jussieu.fr