Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS 1

Examen de mathématiques 1
Septembre 2002

Corrigé de l'examen et remarques

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence à l'aide de la fonction

$$f\ :\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\quad x \mapsto f(x)=\frac{x^3}{3}$$

par

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^3}{3}$$

et la donnée de u_0 strictement positif

1. Etudier les variations et le signe de la fonction auxiliaire g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

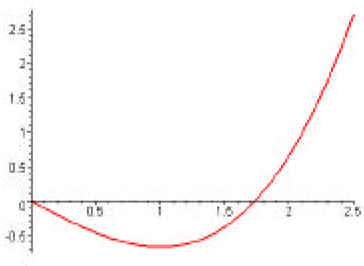
La fonction polynomiale g est dérivable, et $g'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. On en déduit le tableau de variation

x	0		1	a		$+\infty$
$g'(x)$	0	-	0		+	
$g(x)$	0		-2/3	0		$+\infty$
$f(x)$	0			b		$+\infty$

L’existence et l’unicité de a tel que $g(a)=0$ sont impliquées par le théorème des valeurs intermédiaires (cf le cours) et la monotonie de g.
A cette question, ou à la suivante, on a besoin de déterminer a, il suffit de résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{a^3}{3} - a = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a = a(a^2-3) = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$$

On en déduit que $b = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.



2. Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle constante ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante si et seulement si

$$\left(\forall n\in\mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) = u_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall n\in\mathbf{N}, g(u_n)=0\right) \Leftrightarrow \left(\forall n\in\mathbf{N}, u_n = \sqrt{3}\right).$$

si et seulement si $u_0 = \sqrt{3}$.

3. Discuter suivant la valeur initiale u_0 de la suite, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$

De la question 1 on déduit que

$$u_n < \sqrt{3} \Rightarrow g(u_n) < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$$u_n > \sqrt{3} \Rightarrow g(u_n) > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

On a aussi (vérification immédiate) que

$$u_n < \sqrt{3} \Rightarrow u_{n+1} < \sqrt{3}$$

$$u_n > \sqrt{3} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{3}$$

On montre par récurrence (faites-le) que

$$u_0 < \sqrt{3} \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} < u_n \text{ et } 0 < u_{n+1} < \sqrt{3}\right)$$

$$u_0 > \sqrt{3} \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbf{N}\, u_{n+1} > u_n \text{ et } u_{n+1} \geq \left(\frac{u_0}{\sqrt{3}}\right)^n \sqrt{3}\right)$$

On en déduit

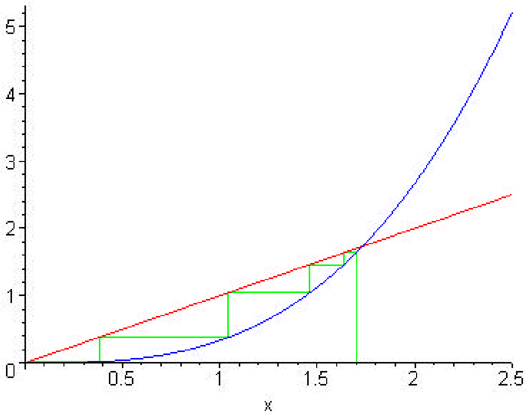
- si $u_0 < \sqrt{3}$, la suite est décroissante, minorée (par 0) donc convergente. La limite L vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{L^3}{3} = L \\ 0 \leq L < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(L^2 - 3) = 0 \\ 0 \leq L < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow L = 0$$

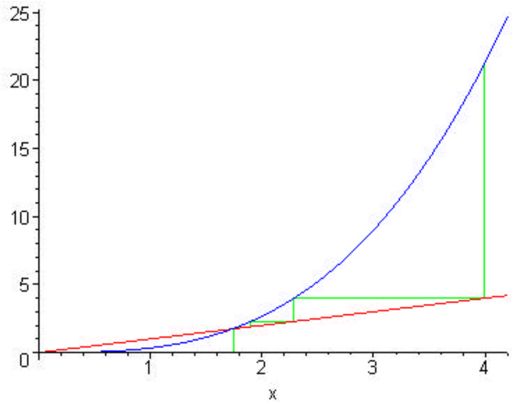
donc la suite converge vers 0 .

Remarque : comme la suite est décroissante, on a $L \leq u_0 < \sqrt{3}$.

- si $u_0 = \sqrt{3}$ la suite est constante.
- si $u_0 > \sqrt{3}$ la suite , minorée par une suite géométrique de raison >1 tend vers $+\infty$ (en croissant).



$u_0 = 1,7 < \sqrt{3}$



$u_0 = 1,75 > \sqrt{3}$

Remarques

- Ne pas dire que la suite est constante pour $u_0=0$ (dans l'énoncé, il est supposé $u_0>0$)
- discussion de la monotonie : elle se déduit du signe de *g*. Une récurrence (ou du moins dire que cela se montre par récurrence) est indispensable.
- La variation de *f* n'est pas demandée mais elle est utile pour le 3) (et élémentaire).
- On peut aussi dire quand $u_0 > \sqrt{3}$ que la suite est croissante et que si elle est majorée, elle est convergente vers une limite L telle que

$$\begin{cases} \dfrac{L^3}{3} = L \\ L > \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(L^2-3)=0 \\ L > \sqrt{3} \end{cases}$$

or ce système n'a pas de solution.

L'inégalité stricte vient de ce que comme la suite est croissante, on a $L \geq u_0 > \sqrt{3}$.

Références dans Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)

Le module «nombres réels, suites et fonctions » et plus spécialement la partie « apprendre, suites numériques, suites récurrentes ».
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/analyse1/apprendre/lessuites/7.htm.

lutelmaths@cicrp.jussieu.fr