Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS 1

Examen de mathématiques 1
Septembre 2002

Corrigé de l'examen et remarques

Exercice 2

1. Former le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$$f\ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

Il s'agit d'un produit : on calcule les développements limités en 0 à l'ordre 4 de chacun des facteurs puis on fait le produit des parties principales en ne conservant que les termes de degré au plus 4.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right)\\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + x^4\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

2. Former le développement limité à l'ordre 4 en $\pi/4$ de la fonction
$$f\ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad x \mapsto \exp(\cos(x))$$

Il s'agit d'une fonction composée : on calcule les développements limités à l'ordre 4 en $\pi/4$ du cosinus et en $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ de l'exponentielle et on fait le produit de composition des parties principales en ne conservant que les termes de degré au plus 4 .

Développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 4 en $\pi/4$: on pose $t = x - \pi/4$ pour se ramener à un développement en 0.
On a alors

$$\cos(x) = \cos(t+\pi/4) = \cos(t)\cos(\pi/4) - \sin(t)\sin(\pi/4)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - t + \frac{t^3}{6} + t^4\varepsilon(t))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)$$

Développement limité de l'exponentielle en $1/\sqrt{2}$: on pose $u = y - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$e^y = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}+u} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^u = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon(u))$$

Il reste à composer

$$e^{\cos(x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)\right)^2}{2}$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)\right)^4}{24}$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)\right)^4 \varepsilon(\frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}) + t^4\varepsilon(t)))$$

On développe et ne conserve que les termes de degré au plus 4

$$e^{\cos(x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24})$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}(t^2 - t^3 + \frac{t^4}{4} - \frac{2t^4}{6})}{2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(-t^3 - \frac{3t^4}{2})}{6} + \frac{\frac{t^4}{4}}{24} + t^4\varepsilon(t))$$

et finalement

$$e^{\cos(x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}t + (-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4})t^2 + (\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{4})t^3$$
$$+ (-\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{96})t^4 + t^4\varepsilon(t))$$

et

$$e^{\cos(x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \pi/4) + (-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4})(x - \pi/4)^2$$
$$+ (\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{4})(x - \pi/4)^3 + (-\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{96})(x - \pi/4)^4 + (x - \pi/4)^4\varepsilon(x))$$

Pour les courageux (ou inconscients) qui ont voulu utiliser la formule de Taylor (ce qui était licite mais difficile à mener au bout) voici les dérivées de la fonction g et leurs valeurs en $\pi/4$.

Le calcul est fait avec Maple.

```
> g:=x->exp(cos(x));
```

$$g := x \to e^{\cos(x)}$$

```
> g1:=diff(g(x),x);s1:=subs( x=Pi/4,g1);eval(s1);
```

$$g1 := -\sin(x)\, e^{\cos(x)}$$

$$s1 := -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) e^{\cos(1/4\,\pi)}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{(1/2\sqrt{2})}$$

```
> g2:=diff(g1,x);s2:=subs( x=Pi/4,g2);eval(s2);
```

$$g2 := -\cos(x)\, e^{\cos(x)} + \sin(x)^2\, e^{\cos(x)}$$

$$s2 := -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) e^{\cos(1/4\,\pi)} + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 e^{\cos(1/4\,\pi)}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{(1/2\sqrt{2})} + \frac{1}{2} e^{(1/2\sqrt{2})}$$

```
> g3:=diff(g2,x);s3:=subs( x=Pi/4,g3);eval(s3);
```

$$g3 := \sin(x)\, e^{\cos(x)} + 3\cos(x)\sin(x)\, e^{\cos(x)} - \sin(x)^3\, e^{\cos(x)}$$

$$s3 := \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) e^{\cos(1/4\,\pi)} + 3\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) e^{\cos(1/4\,\pi)} - \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^3 e^{\cos(1/4\,\pi)}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}\, e^{(1/2\sqrt{2})} + \frac{3}{2} e^{(1/2\sqrt{2})}$$

```
> g4:=diff(g3,x);s4:=subs( x=Pi/4,g4);eval(s4);
```

$$g4 := \cos(x)\, e^{\cos(x)} - 4\sin(x)^2\, e^{\cos(x)} + 3\cos(x)^2\, e^{\cos(x)} - 6\cos(x)\sin(x)^2\, e^{\cos(x)} + \sin(x)^4\, e^{\cos(x)}$$

$$s4 := \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) e^{\cos(1/4\,\pi)} - 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 e^{\cos(1/4\,\pi)} + 3\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 e^{\cos(1/4\,\pi)} - 6\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 e^{\cos(1/4\,\pi)} + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^4 e^{\cos(1/4\,\pi)}$$

$$-\sqrt{2}\, e^{(1/2\sqrt{2})} - \frac{1}{4} e^{(1/2\sqrt{2})}$$

Remarques

- Dans les développements limités ne pas oublier d’écrire les epsilons (ou les petit o)

Références dans Université en Ligne
(http://www.uel.education.fr/consultation/reference/index.htm))

Le module « développements limités », les sections «apprendre » et « s’exercer, calculs de développements limités ». **lien**
http://www.uel.education.fr/consultation/reference/mathematiques/dev_limites/menumodule/menusexercer/index_bas.htm