**Université Pierre et Marie Curie**
**DEUG MIAS 1**

**Examen de mathématiques 1**
**Septembre 2002**

**Corrigé de l'examen et remarques**

# Exercices

**Exercice 1**

**1.** Calculer $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

On peut par exemple travailler sur la forme de la fraction rationnelle (si le facteur $x$-1 ne se simplifie pas, il n'y aura pas de limite)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3} &= \frac{2}{(1-x)(1+x)}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
&= \frac{1}{(1-x)}\cdot\left(\frac{2}{(1+x)}-\frac{3}{(1+x+x^2)}\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{2+2x+2x^2-3-3x}{(1+x)(1+x+x^2)} \\
&= \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{2x^2-x-1}{(1+x)(1+x+x^2)} \\
&= \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{(2x+1)(x-1)}{(1+x)(1+x+x^2)}
\end{aligned}$$

D'où pour $x\neq 1$ : $\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3} = -\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}$

et $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-\frac{1}{2}$.

**Remarques :**

- Dire que l'on a des formes indéterminées ne fait pas de mal mais ne donne pas droit à des points : c'est le but de l'exercice de lever l'indétermination
- On peut aussi utiliser un développement limité des dénominateurs en 1. A priori l'ordre 1 va suffire puisque la racine 1 est simple.
- Attention : il faut le faire en 1 et non pas en 0 comme dans certaines copies.
- Le signe – a souvent été omis.

**Références dans Université en Ligne** (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)

Pour la notion de limite, le module « nombres réels, suites et fonctions », partie « étude locale des fonctions, limite, continuité »
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/analyse1/apprendre/lesfonctions_etudelocale/2_1.htm

**Testez sur un exercice analogue si vous avez compris.**

Calculer $\lim_{x\to -2}\left(\frac{2}{-2+x+x^2}-\frac{3}{2+x+2x^2+x^3}\right)$

Demandez la réponse (code A01) à l'équipe pédagogique de L'UTĚS ou par mail à
lutelmaths@cicrp.jussieu.fr

**2.** Calculer $\lim_{x\to e}\frac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}$.

Une démonstration rapide s'obtient en écrivant (pour $x \neq e$)

$$\frac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}=\frac{\sin(x)-\sin(e)}{x-e}\cdot\frac{x-e}{\ln(x)-\ln(e)}$$

et en remarquant (dérivées en *e* des fonctions sinus et logarithme) que
$\lim_{x\to e}\frac{\sin(x)-\sin(e)}{x-e}=\cos(e)$ et $\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, d'où l'existence de la limite et l'égalité

$$\lim_{x\to e}=\frac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}=e\cos(e)$$

**Remarques**

- On peut aussi faire des développements limités à l'ordre 1 en *e* au numérateur et au dénominateur (si on les obtient par la formule de Taylor, on constate que c'est le même calcul qu'avec les dérivées).

**Références dans Université en Ligne** (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)

Pour la notion de dérivée, le module « nombres réels, suites et fonctions », partie « étude locale des fonctions d'une variable réelle, continuité, limite, dérivabilité en un point ».
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/analyse1/apprendre/lesfonctions_etudelocale/3_1.htm

**Testez sur un exercice analogue si vous avez compris.**

Calculer $\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{\tan(x)}$

et demandez la réponse (code A02) à l'équipe pédagogique de L'UTĚS ou par mail à
lutelmaths@cicrp.jussieu.fr