Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS 1

Examen de mathématiques 1
Septembre 2002

Questions de cours

1) Donner la définition de la borne supérieure dans **R** d'une partie A non vide de **R**.

2) Donner la définition d'une suite réelle $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ convergente.

3) Montrer que toute suite croissante majorée est convergente.

Exercices

Exercice 1

1. Calculer $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. Calculer $\lim_{x\to e}\dfrac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}$.

Exercice 2

1. Former le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$$f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \sin(x)\cos(x)$$

2. Former le développement limité à l'ordre 4 en $p/4$ de la fonction
$$f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \exp(\cos(x))$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence à l'aide de la fonction

$$f\ :\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\quad x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{3}$$

par

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^3}{3}$$

et la donnée de u_0 strictement positif

1. Étudier les variations et le signe de la fonction auxiliaire g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

2. Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle constante ?

3. Discuter suivant la valeur initiale u_0 de la suite, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 4

1. Chercher le PGCD (noté D) des polynômes suivants

$$
\begin{aligned}
A &= X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 \\
B &= X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 4
\end{aligned}
$$

2. Écrire une relation de Bézout entre A, B et D.

3. Donner une factorisation de A et B en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ puis dans $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 5

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 4, tels que

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 6 \text{ et } P(0) = 1.$$