Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2001-2002

Examen du module de mathématiques
11 juin 2001
Durée de l'épreuve : 3 heures

EXERCICE 1

Soit *E* un espace vectoriel et *u* une application linéaire de *E* dans *E*.

1) Montrer que $Ker\, u \subset Ker\, u^2$ et que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par :

$$u(e_1) = \sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3$$
$$u(e_2) = -e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3$$
$$u(e_3) = -e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3$$

2) a) Écrire la matrice u dans la base (e_1, e_2, e_3).

2) b) Après avoir déterminé $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} u^2$, montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

2) c) Donner les dimensions de $\operatorname{Im} u$ et de $\operatorname{Im} u^2$ et en déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$..

EXERCICE 2

Soit A la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans une base $B = (e_1, e_2)$, donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) a) Déterminer les valeurs propres λ et μ de A ainsi qu'une base B_1 de vecteurs propres de A.

2) b) Écrire la matrice D de l'endomorphisme A dans cette nouvelle base B_1.

3) Écrire la matrice de passage P de la base B à la base B_1. Calculer P^{-1}.

4) Écrire la relation entre A et D. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) On considère les nombres de Fibonacci définis par la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Montrer que cette relation de récurrence peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

5) b) En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$ (On rappelle que par convention $A^0 = Id$).

5) c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

EXERCICE 3

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sqrt{u}}{1+u} du$$

Partie I : Étude de la fonction F.

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) a) Montrer que pour tout $u \in [0, x]$, $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$

2) b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2x}{3(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{2x}{3}$

3) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0 (à droite) et qu'elle est dérivable à droite en 0.

Partie II : Étude d'une équation différentielle.

Soit (E) l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2x} y = \frac{1}{2(1+x)}$

1) De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?
2) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$y' + \frac{1}{2x} y = 0$$
3) Trouver une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Vous pourrez exprimer le résultat à l'aide de la fonction F.
4) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui admet une limite à droite en 0.

Partie III : Calcul explicite de la fonction F.

1) Calculer F en posant le changement de variable $t = \sqrt{u}$.
2) La fonction F admet elle une limite en $+\infty$?