Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2001-2002

Examen du module de mathématiques
11 juin 2001
Durée de l'épreuve : 3 heures

Sujet :

Domaine :

Outils

- Application linéaire, Image, Noyau
- Suites récurrentes, inverse d'une matrice, calcul de la puissance n-ième d'une matrice
- Equation différentielle, fonction définie par une intégrale, primitive d'une fraction rationnelle

(voir par exemple les modules «algèbre linéaire », «Intégration» et «Equations différentielles» d'Université en ligne sur le serveur pédagogique
http://www.uel.education.fr/consultation/reference/index.htm

Il s'agit de plusieurs exercices indépendants sur un domaine restreint du cours. Il faut donc se fixer un temps limité pour chercher chaque exercice et commencer par ceux qu'on préfère.
Les encadrés comme celui-ci sont des commentaires.
On y trouvera aussi des indications et des conseils permettant d'éviter des erreurs, rencontrées dans des copies.

EXERCICE 1
Soit *E* un espace vectoriel et *u* une application linéaire de *E* dans *E*.

1) Montrer que $Ker\, u \subset Ker\, u^2$ et que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.

Si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u(x)=0$; d'ou $u^2(x)=u(u(x))=u(0)=0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} u$.

Si $y \in \operatorname{Im} u^2$, alors $\exists\, x \in E$ tel que $y=u(u(x))$ d'où $y=u(z)$ avec $z=u(x)$ élément de E et finalement $y \in \operatorname{Im} u$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $u:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par :

$u(e_1)=\sqrt{2}e_1+e_2+e_3$

$u(e_2)=-e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2+\frac{\sqrt{2}}{2}e_3$

$u(e_3)=-e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2+\frac{\sqrt{2}}{2}e_3$

2) a)Ecrire la matrice u dans la base (e_1,e_2,e_3).

1) a) $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

2) b) Après avoir déterminé $\text{Ker}\, u$ et $\text{Ker}\, u^2$, montrer que $\text{Ker}\, u = \text{Ker}\, u^2$.

$$\text{Ker}\, u=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{2}x-y-z=0 \ et \ x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\right\}$$

$=\{(0,y,-y)\ y\in\mathbb{R}\}=\langle(0,1,-1)\rangle$ et donc $\dim \text{Ker}\, u=1$.

Pour déterminer de même $\text{Ker}\, u^2$, il est nécessaire de calculer A^2 :

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}\, u=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : A^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{2}xy+2\sqrt{2}z=0 \ et \ x=0\right\}$$

$==\{(0,y,-y)\ y\in\mathbb{R}\}=\langle(0,1,-1)\rangle$

Donc les deux espaces images sont égaux.

2) c) Donner les dimensions de $\text{Im}\, u$ et de $\text{Im}\, u^2$ et en déduire que $\text{Im}\, u = \text{Im}\, u^2$ ..

Comme $\dim\mathbb{R}^3=3=\dim \text{Ker}\, u+\dim \text{Im}\, u$ (d'après le théorème du rang) on en déduit que $\dim \text{Im}\, u=3-\dim \text{Ker}\, u=2$. De même $\dim \text{Im}\, u^2=2$. Comme d'après la question 1) on a $\text{Im}\, u^2\subset \text{Im}\, u$ et que ces deux espaces ont même dimension, c'est qu'ils sont égaux.

EXERCICE 2

Soit A la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans une base $B=(e_1,e_2)$, donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

Le polynôme caractéristique de $P(x)$ est égal à $\det(A-xI_2)=\begin{vmatrix}-x & 1\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}=x^2-x-1$.

2) a) Déterminer les valeurs propres λ et μ de A ainsi qu'une base B_1 de vecteurs propres de A.

Les valeurs propres de A sont les racines de $P(x)$ soit $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

L'espace propre

$$E_\lambda=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(A-\lambda Id)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\lambda x+y=0\right\}=\langle(1,\lambda)\rangle$$

De même $E_\mu=\langle(1,\mu)\rangle$ D'où une base de vecteurs propres donnée par $f_1=e_1+\lambda e_2$, $f_2=e_1+\mu e_2$

2) b) Ecrire la matrice D de l'endomorphisme A dans cette nouvelle base B_1.

Dans la base B_1, la matrice D de l'endomorphisme est la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

3) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B_1. Calculer P^{-1}.

Rappel : la matrice de passage exprime les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base.

La matrice de passage P de la base B à la base B_1 est $\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}$

d'où $\det P=\mu-\lambda=-\sqrt{5}$ et $P^{-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\mu & -1\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}$

Rappel : inverse d'une matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de déterminant non nul : $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

4) Écrire la relation entre A et D. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) On a $D=P^{-1}AP$ soit $A=PDP^{-1}$ et $A^2=PDP^{-1}PDP^{-1}=PD^2P^{-1}$, on vérifie facilement par récurrence $A^n=PD^nP^{-1}$. On a donc :

$$A^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & -1\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}-\mu^{n-1} & \lambda^n-\mu^n\\ \lambda^n-\mu^n & \lambda^{n+1}-\mu^{n+1}\end{pmatrix}$$ car $\lambda\mu=-1$

5) On considère les nombres de Fibonacci définis par la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0=0 \quad , \quad a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \quad \textit{pour tout} \quad n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Montrer que cette relation de récurrence peut s'écrire sous la forme matricielle :

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}$

En effet $\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_n=a_n\\ a_{n+1}=a_{n-1}+a_n\end{cases}$ d'où l'écriture matricielle de la relation de récurrence.

5) b) En notant $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $X_n=A^nX_0$ (On rappelle que par convention $A^0=Id$).

On a donc pour tout $n\geq 0$ $X_n=AX_{n-1}=A^2X_{n-2}=.....=A^nX_0$ avec $X_0=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

5) c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

On déduit de 4) que $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^n-\mu^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

EXERCICE 3

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x\frac{\sqrt{u}}{1+u}du$$

Partie I : Étude de la fonction F.

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x>0$, alors $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est bien défini. De plus la fonction $u\to\frac{\sqrt{u}}{1+u}$ est définie et continue sur $[0,x]$. Par suite la fonction est bien définie pour tout $x>0$.

2) a) Montrer que pour tout $u \in [0, x]$, $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$

Si $0 \leq u \leq x$ alors $1 \leq 1+u \leq 1+x$ et $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$

2) b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2x}{3(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{2x}{3}$

Par suite puisque $\sqrt{x}$ et $\sqrt{u}$ sont positifs,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \int_0^x \sqrt{u} du \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \sqrt{u} du$$

Comme $\int_0^x \sqrt{u} du = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$

Il en résulte que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \frac{2}{3} x\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2}{3} x\sqrt{x}$$

$$\frac{2x}{3(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{2}{3} x$$

3) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0 (à droite) et qu'elle est dérivable à droite en 0.

1) Les termes extrêmes de cette double inégalité tendent vers 0 quand x tend vers 0, donc $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$

En posant $F(0) = 0$ on obtient une fonction continue sur $[0, \infty[$. De plus les deux termes extrêmes divisés par x tendent vers $\frac{2}{3}$ quand x tend vers 0. Par suite $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \frac{2}{3}$

Et donc la fonction F ainsi prolongée en 0 est dérivable à droite en 0, de dérivée égale à $\frac{2}{3}$.

<u>Partie II : Étude d'une équation différentielle.</u>

Soit (E) l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2x} y = \frac{1}{2(1+x)}$

1) De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

L'équation différentielle est linéaire du premier ordre (à coefficients non constants).

2) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{1}{2x} y = 0$$

Si y n'est pas la solution identiquement nulle, elle ne s'annule jamais car deux solutions distinctes sont distinctes en tout point et $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x}$

Donc $\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln x + K$

Soit $y(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}$

où C est une constante réelle.

3) Trouver une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Vous pourrez exprimer le résultat à l'aide de la fonction F.

On cherche une solution de la forme $y(x)=\frac{C(x)}{\sqrt{x}}$ par la méthode de variation de la constante.

Cette fonction est solution de (E) si et seulement si $C'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

C'est à dire si $C(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sqrt{u}}{1+u}du+C_0$

Ainsi les solution de (E) sont les fonctions $y(x)=\frac{1}{2}F(x)+\frac{C}{\sqrt{x}}$ où C est une constante réelle.

4) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui admet une limite à droite en 0.

Nous avons vu dans la partie I que la fonction F à une limite à droite en 0. La fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers l'infini quand x tend vers 0. Donc il existe une seule solution qui à une limite à droite en 0, à savoir la fonction $y=\frac{1}{2}F$ qui correspond à C=0

Partie III : Calcul explicite de la fonction F.

1) Calculer F en posant le changement de variable $t=\sqrt{u}$.

En posant $t=\sqrt{u}$ on obtient : $\int_0^x \frac{\sqrt{u}}{1+u}du=\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}2tdt$

La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle est immédiate :

$\frac{2t^2}{1+t^2}=2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)$. Par suite $\int_0^x \frac{\sqrt{u}}{1+u}du=2\left(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}\right)$. Et $F(x)=2\left(1-\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$

2) La fonction F admet elle une limite en $+\infty$?

La fonction arctangente est bornée : si $x>0$, $0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$

Par suite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=2$