

Examen du module de mathématiques
19 juin 2000
Durée de l'épreuve : 3 heures

EXERCICE 1

Soit m un paramètre réel et A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A$ en fonction de m .

On se donne $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système :

$$\begin{cases} mx - y + z = b_1 \\ y + z = b_2 \\ x + mz = b_3 \end{cases}$$

2) a) A quelles conditions sur le paramètre m ce système admet-il une solution unique ? Le résoudre dans ce cas et calculer A^{-1} .

2) b) Discuter et résoudre le système dans les autres cas.

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient e_1, e_2, e_3 et e_4 quatre éléments de E définis par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad e_1(x) &= \sin x \operatorname{sh} x, & e_2(x) &= \sin x \operatorname{ch} x \\ e_3(x) &= \cos x \operatorname{sh} x, & e_4(x) &= \cos x \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

1) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre de E .

Soit $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'application linéaire $u : F \rightarrow E$ définie par :

$\forall y \in F, u(y) = y'' + 2y' + 2y$ où y' et y'' désignent les fonctions dérivées premières et secondes de y .

2) a) Calculer $u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)$ et en déduire que u est un endomorphisme de F .

2) b) Ecrire la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) de F .

3) Donner une base de $\operatorname{Im} u$ et de $\ker u$.

4) Montrer que $F = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

EXERCICE 3

Trouver toutes les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' + y = e^x \sin x$$

EXERCICE 4

- 1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$F = \frac{18}{(X-1)(X^2+2X+3)}$$

- 2) Calculer $\int_{-1}^0 F(x) dx$

EXERCICE 5

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_1^{e^x} \sin \frac{1}{t} dt$$

- 1) Quel est le domaine de définition de g ?
2) Montrer que pour tout x appartenant à ce domaine de définition

$$g'(x) - g''(x) = \cos(e^{-x})$$

- 3) On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad -y'' + y' = \cos(e^{-x})$$

- 3) a) Résoudre l'équation homogène associée.
3) b) Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient $y(0) = 0$

- 4) Montrer que pour toute solution y de (E) qui vérifie $y(0) = 0$, il existe un réel A tel que

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{y(x)}{e^x} \leq A$$