Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 1999-2000

Examen du module de mathématiques
19 juin 2000
Durée de l'épreuve : 3 heures

EXERCICE 1

Soit m un paramètre réel et A la matrice définie par : $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A$ en fonction de m.

On développe par exemple par rapport à la première colonne :

$$\det A=\begin{vmatrix} m & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=m^2-1$$

On se donne $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbf{R}^3$. On considère le système :

$$\begin{cases} mx-y+z & =b_1 \\ \quad\;\; y+z & =b_2 \\ x\quad\;\; +mz & =b_3 \end{cases}:$$

2) a) A quelles conditions sur le paramètre m ce système admet il une solution unique ? Le résoudre dans ce cas et calculer A^{-1}.

Le système admet une solution unique si le déterminant de la matrice associée est non nul, si $m\notin\{-1,1\}$.
C'est un système de Cramer d'où (en appliquant les formules de Cramer) :

$$x=\frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \\ b_3 & 0 & m \end{vmatrix}=\frac{b_1m+b_2m-b_3}{m^2-1}$$

$$y=\frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix} m & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 \\ 1 & b_3 & m \end{vmatrix}=\frac{b_1+b_2m^2-b_3m}{m^2-1}$$

$$z=\frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix} m & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{vmatrix}=\frac{-b_1-b_2+b_3m}{m^2-1}$$

On peut aussi utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Matriciellement le système s'écrit $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Puisque $\det(A) \neq 0$, A est inversible et on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Donc par identification, on en déduit que : $A^{-1} = \dfrac{1}{m^2-1}\begin{pmatrix} m & m & -1 \\ 1 & m^2 & -m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

On pourrait bien sûr calculer l'inverse par la méthode des cofacteurs ou par la méthode du pivot de Gauss, mais cela reviendrait à refaire les calculs déjà faits.

2) b) Discuter et résoudre le système dans les autres cas.

Si $m = 1$, le système devient $\begin{cases} x - y = b_1 \\ y + z = b_2 \\ x + z = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = b_1 \\ y + z = b_2 \\ x - y = b_3 - b_2 \end{cases}$.

Si $b_1 \neq b_3 - b_2$ le système n'admet pas de solution et dans le cas contraire il existe une infinité de solutions de la forme $\left(y + b_1, y, -y + b_2\right)$, y réel.

Si $m = -1$, le système devient $\begin{cases} x + y = -b_1 \\ y + z = b_2 \\ x - z = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b_1 \\ y + z = b_2 \\ x + y = b_3 + b_2 \end{cases}$.

Si $b_1 \neq -b_3 - b_2$ le système n'admet pas de solution et dans le cas contraire il existe une infinité de solutions de la forme $\left(-y - b_1, y, -y - b_2\right)$, y réel.

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soient e_1, e_2, e_3 et e_4 quatre éléments de E définis par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad e_1(x) = \sin x \operatorname{sh} x \quad , \quad e_2(x) = \sin x \operatorname{ch} x$$
$$e_3(x) = \cos x \operatorname{sh} x \quad , \quad e_4(x) = \cos x \operatorname{ch} x$$

1) Montrer que la famille $\left(e_1, e_2, e_3, e_4\right)$ est une famille libre de E.

Il s'agit d'une famille de fonctions, l'égalité $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i = 0$ implique $\forall x \in \mathbf{R} \quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i\,(x) = 0$, et les coefficients sont indépendants de x. On va pouvoir les déterminer en utilisant des valeurs bien choisies de x.

Supposons que $f=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i e_i=0$. Puisque f est l'application nulle, elle prend la valeur 0 pour toute valeur de la variable. En particulier $f(0)=\lambda_4=0$. Ensuite, $f(2\pi)=\lambda_3=0$.
De plus, comme f est la fonction nulle, sa dérivée est nulle aussi. Or
$f'(x)=\sin x(\lambda_1 \operatorname{ch} x+\lambda_2 \operatorname{sh} x)+\cos x(\lambda_1 \operatorname{sh} x+\lambda_2 \operatorname{ch} x)$.

D'ou $f'(0)=\lambda_2=0$ et donc $f(x)=\lambda_1 \sin x \operatorname{sh} x=0$. De plus $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=\lambda_1 \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$ donc $\lambda_1=0$.

Commentaire : On peut aussi regarder les valeurs en $\pm\pi/2$.

En résumé, $f=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i e_i=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ et donc (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre de *E*.

Soit $F=\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$.On considère l'application linéaire $u:F\to E$ définie par :
$\forall y\in F$, $u(y)=y''+2y'+2y$ où y' et y'' désignent les fonctions dérivées premières et secondes de *y*.

2) a) Calculer $u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_4)$ et en déduire que u est un endomorphisme de *F*.

Par dérivation d'un produit de fonctions on obtient :
$e_1'(x)=\operatorname{sh} x\cos x+\operatorname{ch} x\sin x$
$e_1''(x)=\operatorname{ch} x\cos x-\operatorname{sh} x\sin x+\operatorname{sh} x\sin x+\operatorname{ch} x\cos x$
puis
$u(e_1)(x)=2\operatorname{sh} x\sin x+2\sin x\operatorname{ch} x+2\cos x\operatorname{sh} x+2\cos x\operatorname{ch} x$
soit
$u(e_1)=2e_1+2e_2+2e_3+2e_4$
On obtient par un calcul analogue
$u(e_2)=2e_1+2e_2+2e_3+2e_4$
$u(e_3)=-2e_1-2e_2+2e_3+2e_4$
$u(e_4)=-2e_1-2e_2+2e_3+2e_4$
Par suite pour $i=1..4$ $u(e_i)\in F$ et *u* est un endomorphisme de *F*.

Il est dit dans l'énoncé que *u* est linéaire donc on ne le revérifie pas dans le corrigé ou la copie.

2) b) Ecrire la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4) de *F*.

De la question précédente on déduit directement que dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4), $M(u)=\begin{pmatrix}2&2&-2&-2\\2&2&-2&-2\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{pmatrix}$

3) Donner une base de $\operatorname{Im} u$ et de $\ker u$.

L'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$ est par définition engendré par les vecteurs $u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)$ donc par les vecteurs $v_1 = u(e_1)$ et $v_3 = u(e_3)$ puisque $u(e_1) = u(e_2)$ et $u(e_3) = u(e_4)$.
Or les vecteurs $v_1 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 2e_4$ et $v_3 = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3 + 2e_4$ sont linéairement indépendants car le rang de la matrice de leurs composantes vaut 2, puisque par exemple $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Il forment donc une base de $\operatorname{Im} u$.

Puisque (théorème du rang) $\dim F = 4 = \dim \operatorname{Im} u + \dim \ker u$, $\ker u$ est un espace vectoriel de dimension 2. Or les vecteurs $u_1 = e_1 - e_2$ et $u_2 = e_3 - e_4$ appartiennent à $\ker u$ et sont linéairement indépendants : ils forment donc une base de $\ker u$.

4) Montrer que $F = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Il suffit de vérifier que les vecteurs v_1, v_2, u_1 et u_2 sont linéairement indépendants ; ils formeront alors une base de l'espace vectoriel F de dimension 4.
Or la relation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = 0$ s'écrit :

$$e_1(2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) + e_2(2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3) + e_3(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4) + e_4(2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4) = 0$$

Comme les e_i sont linéairement indépendants, cela entraîne que :

$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

Additionnant les deux premières équations et les deux dernières on obtient

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Les égalités $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ s'en déduisent facilement et on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Les vecteurs v_1, v_2, u_1 et u_2 sont donc linéairement indépendants et $\ker u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

EXERCICE 3

Trouver toutes les solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' + y = e^x \sin x$$

La solution générale de l'équation sans second membre sur l'intervalle proposé (qui ne contient pas 0) est $y = \dfrac{K}{x}$ où K est une constante réelle.
Pour avoir une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On a donc :

$$y' = \frac{K'}{x} - \frac{K}{x^2} \quad \text{soit} \quad xy' + y = K' = e^x \sin x \quad \text{et} \quad K = \int e^x \sin x dx$$

On utilise alors une intégration par parties avec $u = e^x$ et $v' = \sin x$ on obtient :

$$K = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

On fait une nouvelle intégration par parties, avec $u = e^x$ et $v' = \cos x$, on obtient

$$K = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Finalement $K = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$.

On aurait aussi pu dire que c'est une primitive d'un type classique et la chercher (par identification) sous la forme ($a \cos x + b \sin x$) e^x.

La solution générale sur de l'équation différentielle proposée, somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière est donc

$$y = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2x} + \frac{K}{x}$$

EXERCICE 4

1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$F = \frac{18}{(X-1)(X^2+2X+3)}$$

D'après le cours, il existe trois réels *a, b, c* tels qu'on a la décomposition suivante :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+2X+3}$$

En multipliant l'égalité par $X-1$ et en donnant à X la valeur 1 on obtient $a = 3$.
En multipliant l'égalité par X et en faisant tendre X vers l'infini, on trouve $a + b = 0$ soit $b = -3$.
Prenant la valeur en 0 on obtient $-\dfrac{18}{3} = -3 + \dfrac{c}{3}$, d'où $c = -9$.

Par suite, $F = \dfrac{3}{X-1} + \dfrac{-3X-9}{X^2+2X+3}$.

2) Calculer $\int_{-1}^{0} F(x)\,dx$

On donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} F(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{3}{x-1}dx + \int_{-1}^{0} \frac{-3x-9}{x^2+2x+3}dx = \left[3\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} - 3\int_{-1}^{0} \frac{x+1+2}{(x+1)^2+2}$

$$= -3\ln 2 - \frac{3}{2}\left[\ln\left((x+1)^2+2\right)\right]_{-1}^{0} - 6\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}\ln 6 - 3\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 5

On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\int_1^{e^x}\sin\frac{1}{t}\,dt$$

1) Quel est le domaine de définition de g ?

Comme t varie de 1 à e^x, t ne s'annule jamais car la fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbf{R}^{+*}$.Le domaine de définition de g est donc **R**.

2) Montrer que pour tout x appartenant à ce domaine de définition

$$g'(x)-g''(x)=\cos\left(e^{-x}\right)$$

Indication : introduire (sans la calculer) une primitive de $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$.

On a $g(x)=F\left(e^x\right)-F(1)$ où F désigne une primitive de $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$; d'où (dérivation d'une fonction composée) $g'(x)=e^x\sin\left(e^{-x}\right)$ et $g''(x)=e^x\sin\left(e^{-x}\right)-\cos\left(e^{-x}\right)$. On en déduit $g'(x)-g''(x)=\cos\left(e^{-x}\right)$.

3) On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad -y''+y'=\cos\left(e^{-x}\right)$$

3) a) Résoudre l'équation homogène associée.

L'équation caractéristique est $-r^2+r=0$ dont les racines sont 0 et 1. Par suite la solution générale de l'équation différentielle homogène est $y=\lambda+\mu e^x$

On peut aussi regarder comme une équation du premier ordre en y'.

3) b) Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient $y(0)=0$

La solution générale de (E), somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée est donc $y=g(x)+\lambda+\mu e^x$

Puisque $g(0)=0$, $y(0)=0\Rightarrow\lambda+\mu=0$ et les solutions vérifiant $y(0)=0$ sont, :

$y(x)=g(x)+\lambda\left(1-e^x\right)$

4) Montrer que pour toute solution y de (E) qui vérifie $y(0)=0$, il existe un réel A tel que

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{y(x)}{e^x} \leq A$$

Pour $x \geq 0$, on a $t \geq 1$ car t varie de 1 à $e^x \geq 1$; d'où $0 \leq \sin\left(\frac{1}{t}\right) \leq \sin 1 \leq 1$ et $0 \leq g(x) \leq e^x - 1$

Soit si $\lambda \geq 0 \quad \frac{y(x)}{e^x} \leq 1$

Et si $\lambda \leq 0 \quad \frac{y(x)}{e^x} \leq 1 - \lambda$