Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2002-2003

Examen du module de mathématiques
Janvier 2003
Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits durant l'épreuve. La rédaction doit être précise et concise. Toute réponse non justifiée sera considérée comme incorrecte.

Exercice 1.
1. Enoncer le théorème de Rolle
2. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ qui admet 3 racines réelles. Montrer que le polynôme P' admet au moins deux racines réelles et que le polynôme P'' admet au moins une racine réelle

Exercice 2.
Soit P le polynôme défini par
$$P(X) = (X^2 + 3X)^2 + (3X + 5)^2$$
1. Calculer $(1 + i)^2$, $(1- i)^2$. Calculer $(A + iB)(A - iB)$ pour $A, B \in \mathbf{C}[X]$.
2. Factoriser P en un produit de deux polynômes à coefficients complexes puis en un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.
3. En déduire une décomposition de P en un produit de deux polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3.
1. Calculer le P.G.C.D de 217 et 49.
2. Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que
$$217u+49v = 7.$$
3. Peut-on trouver des couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que
$$217u + 49v = 3\ ?$$

Exercice 4.
Soit $f(x) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right) + 1 - \cos(x)}{x^2}$, $\quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$

1. Montrer que la fonction f est continue et dérivable en tout point $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction tan(x).
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.
4. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
5. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0.
6. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur **R** par

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in$ **R**, $|f(x)|\leq |x|$

2. Montrer que f est continue sur **R**.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in$ **R** et la relation de récurrence

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

3. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in N}$ est monotone et convergente.

4. En remarquant que f est paire, montrer que

$$u_{n+1}=f(|u_n|) \qquad n\in N .$$

En déduire que $(u_n)_{n\in N}$ est convergente. On notera l sa limite.

5. Montrer que l vérifie nécessairement

$$l = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{l}\right)=1$$

En déduire que

$$l\in\{0\}\cup\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\quad k\in \mathbf{Z}\right\}$$

6. Etude de quelques cas particuliers.

a. Lorsque $u_0=\dfrac{2}{5\pi}$, calculer les valeurs de u_n pour tout $n\in N$.

b. Lorsque $u_0=\dfrac{2}{3\pi}$, calculer les valeurs de u_n pour tout $n\in N$.

c. Soit $k\in N$ et $u_0=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ Quelles sont les limites de $(u_n)_{n\in N}$ et de $(|u_n|)_{n\in N}$?