Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2002-2003

Examen du module de mathématiques
Janvier 2003
Durée de l'épreuve : 3 heures

Il s'agit de plusieurs exercices indépendants sur un domaine restreint du cours. Il faut donc se fixer un temps limité pour chercher chaque exercice et il est sans doute préférable de commencer par ceux qu'on préfère.
Les encadrés comme celui-ci sont des commentaires.
On y trouvera aussi des indications et des conseils permettant d'éviter des erreurs, rencontrées dans des copies.

Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits durant l'épreuve. La rédaction doit être précise et concise. Toute réponse non justifiée sera considérée comme incorrecte.

Exercice 1.
1. Enoncer le théorème de Rolle

Théorème (Rolle). Soit f une application de l'intervalle $[a,b]$ dans **R** vérifiant les conditions suivantes :
(i) f est continue sur $[a,b]$,
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$,
(iii) $f(a)=f(b)$.
Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Il s'agit d'une des 12 questions de cours annoncées. On ne demande pas la démonstration seulement l'énoncé. Cependant il y a eu de nombreuses erreurs dans cet énoncé, voyez sur UeL par exemple la démonstration, une illustration graphique et une animation expliquant la nécessité des hypothèses : continuité sur l'intervalle fermé, dérivabilité nécessaire seulement sur l'ouvert.

Référence Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)
Module « étude globale des fonctions de classe C^n », apprendre, section Théorème et inégalité des accroissements finis. Formule de Taylor-Lagrange (TAF), précisément : page http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/analyse2/apprendre/etudeglobale/taf/2_1.htm et celles qui en dépendent (il y a notamment une vidéo)

2. Soit P un polynôme de **R**[X] qui admet 3 racines réelles. Montrer que le polynôme P' admet au moins deux racines réelles et que le polynôme P'' admet au moins une racine réelle

Une fonction polynôme est continue et dérivable, soit a, b, c les trois racines réelles. En appliquant le théorème de Rolle sur $[a,b]$, il vient qu'il existe une racine réelle, d dans $]a,b[$ de P'. En appliquant le théorème de Rolle sur $[b,c]$, il vient qu'il existe une racine réelle, e dans $]b,c[$ de P'.les deux réels d et e sont distincts puisque dans des intervalles disjoints. Puis en appliquant le théorème de Rolle sur $[d,e]$, à la fonction P' qui vérifie également les hypothèses du théorème de Rolle, il vient qu'il existe une racine réelle, f, de P''. D'où le résultat.

Cette question a été mal traitée dans l'ensemble. Car les étudiants n'ont pas vu le lien entre les deux questions. La consigne est pourtant claire : il y a à l'examen une des 12 questions de cours avec soit la démonstration soit un exercice d'application.
L'erreur très fréquente relevée dans les copies est la suivante : « le polynôme a 3 racines, donc c'est un polynôme de degré 3 » tout ce qu'on peut dire est qu'il est au moins de degré 3, D'abord il se peut qu'il ait d'autres racines réelles (l'énoncé dit « 3 racines réelles » cela ne veut pas dire « exactement 3 racine réelles ». Ensuite même s'il a exactement 3 racines réelles, il n'est pas nécessairement de degré 3, il se peut qu'il y ait des racines complexes. Par exemple le polynôme : $P(X)= (X^2+1)(X-1)(X-2)(X-3)$ a exactement 3 racines réelles mais n'est pas de degré 3 Cependant, on peut affirmer que le polynôme dérivé P' a deux racines réelles, l'une comprise entre 1et 2 et l'autre comprise entre 2 et 3. Enfin, le polynôme dérivée seconde P'' a une racine réelle comprise entre 1 et 3.

Exercice 2.
Soit P le polynôme défini par

$$P(X) = (X^2 + 3X)^2 + (3X + 5)^2$$

1
. Calculer $(1 + i)^2$, $(1- i)^2$. Calculer $(A + iB)(A -iB)$ pour $A, B \in$ **C**[X].

Un calcul dans **C** donne : $(1+i)^2= 1+2i+i^2 = 2i$
$(1-i)^2= 1-2i+i^2 = -2i$

Un calcul dans **C**[X] donne $(A + iB)(A -iB) = A^2+B^2$

Cette question a été correctement traitée par ceux qui connaissent les identités remarquables.

2. Factoriser P en un produit de deux polynômes à coefficients complexes puis en un produit de facteurs irréductibles dans **C**[X].

La première question aidait à factoriser la somme de deux carrés de polynômes :

$$P(X) = (X^2 + 3X)^2 + (3X + 5)^2 = [(X^2 + 3X) +i (3X + 5)] [(X^2 + 3X) -i (3X + 5)]$$

$$P(X) = [X^2 + 3(1+i)X + 5i] [X^2 + 3(1-i)X - 5i]$$

On a exprimé le polynôme P en produit de deux polynômes à coefficients complexes. Ces polynômes sont de degré 2 donc non irréductibles dans **C**, on peut donc les factoriser en cherchant leurs racines.

Recherche des racines du polynôme $X^2 + 3(1+i)X + 5i$

$\Delta = \left(9(1+i)^2\right) - 20i = -2i = (1-i)^2$, les racines sont donc :

$$\frac{-3(1+i)+(1-i)}{2} = -1-2i \quad \text{et} \quad \frac{-3(1+i)-(1-i)}{2} = -2-i$$

Recherche des racines du polynôme $X^2 + 3(1-i)X - 5i$

$\Delta = \left(9(1-i)^2\right) + 20i = 2i = (1+i)^2$, les racines sont donc :

$$\frac{-3(1-i)+(1+i)}{2} = -1+2i \quad \text{et} \quad \frac{-3(1-i)-(1+i)}{2} = -2+i$$

Ainsi, le polynôme P se factorise de la manière suivante :
$P(X) = (X+1+2i)(X+2+i)(X+1-2i)(X+2-i)$

On vérifie bien que les racines sont conjuguées 2 à 2 puisque le polynôme est à coefficients réels.
Cette question n'a pas toujours été bien traitée, en particulier, plusieurs étudiants n'ont pas vu que $-2i = (1-i)^2$, alors que le calcul était demandé dans la première question. Encore une fois, pensez à faire le lien entre les différentes questions.

3. En déduire une décomposition de P en un produit de deux polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Pour avoir une décomposition en produit de polynôme à coefficients réels, il suffit de regrouper les polynômes à coefficients conjugués.

$P(X) = [(X+1+2i)(X+1-2i)][(X+2+i)(X+2-i)] = [X^2+2X+5][X^2+4X+5]$

Remarque : On a même obtenu une factorisation en polynômes à coefficients entiers inférieur ou égal à 5.

Référence Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)
Module « polynômes »,
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/polynomes1/index.htm

Exercice 3.
1. Calculer le P.G.C.D de 217 et 49.
On applique l'algorithme d'Euclide

$217 = 49 \times 4 + 21$
$49 = 21 \times 2 + 7$
$21 = 7 \times 3 + 0$

Le pgcd est le dernier reste non nul soit 7

2. Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que
$$217u + 49v = 7.$$

D'après le théorème de Bézout, on sait que de tels nombres existent.

Recherche d'un couple solution :
Méthode 1 : par combinaisons linéaires .En multipliant la seconde égalité de l'algorithme d'Euclide par 1 et la première par -2 (pour éliminer les termes en 21) et en additionnant, il vient :

$217 \times (-2) = 49 \times (-2 \times 4-1)+7$

Soit $217 \times (-2) + 49 \times 9 = 7$

Un couple solution est (-2, 9)

Méthode 2 par substitution

$$\begin{aligned} 7 &= 49-21\times 2 \\ &= 49-(217-4\times 49)\times 2 \\ &= 49\times(1+8)-217\times 2 \end{aligned}$$

Recherche de tous les couples solutions
Soit (u,v) un autre couple solution, alors

$217u+49v = 217 \times (-2) + 49 \times 9$

et $217(u+2) = 49(9-v)$

$31(u+2) = 7(9-v)$

Les nombres 31 et 7 étant premiers entre eux, il vient d'après le théorème de Gauss

$(u+2) = k \times 7$ et $(9-v) = 31 \times k$, k étant un entier relatif quelconque.

Conclusion
Les solutions cherchées sont donc $(-2+7k, 9-31k)$, k étant un entier relatif quelconque (notez que c'est le même k qui intervient dans les expressions de u et v.

3. Peut-on trouver des couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que
$217u + 49v = 3$?

Puisque 7 ne divise pas 3, l'équation n'a pas de solution.

Cet exercice a été bien traité dans l'ensemble, dans l'UeL vous pouvez vous exercer à résoudre de telles équations appelées diophantiennes : vous entrez deux nombres de votre choix et le cd donne le pgcd et les coefficients de Bézout.

Référence Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)
Module « arithmétique », rubrique « équation diophantienne », précisément la page http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/arithmetique/apprendre/chapitre4/titre2-1det.htm
Il y a aussi dans les rubriques s'exercer et s'évaluer des exercices sur le sujet.

Exercice 4.

Soit $f(x) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)+1-\cos(x)}{x^2}, \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$

1. Montrer que la fonction *f* est continue et dérivable en tout point $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

Il faut d'abord vérifier que la fonction est bien définie : pas de problème pour le dénominateur puisque 0 n'est pas dans l'intervalle. Sur l'intervalle la fonction tangente est bien définie et est du même signe que x, donc l'expression $\frac{\tan x}{x}$ est strictement positive et on peut donc calculer son logarithme.
Sur l'intervalle de définition, la fonction est continue et dérivable comme composée, somme et produit de fonctions continues.

Cette question n'a pas toujours été bien traitée, certains oubliant de se poser la question de la définition du logarithme.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction tan(x).

On peut faire une division :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5) \\ \cline{2-2}
-(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24} \qquad) & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
\quad \frac{x^3}{3}-\frac{4}{120}x^5 & \\
-(\quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6} \qquad) & \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

D'où le résultat : $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$

Remarque : la fonction tangente est impaire, il est donc normal de ne trouver que des termes de degré impair

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction *f*(x).

Il faut composer les développements limités

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4)$$

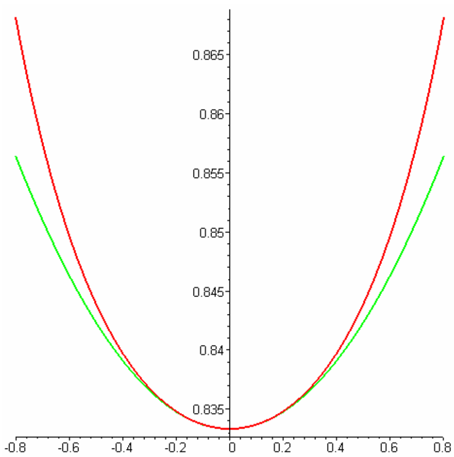
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u)$$

$$\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 - \frac{x^4}{18} + o(x^4) = \frac{x^2}{3} + \frac{7}{90}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) + 1 - \cos x = \frac{x^2}{3} + \frac{7}{90}x^4 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{13}{360}x^4 + o(x^4)$$

Finalement : $f(x) = \frac{5}{6} + \frac{13}{360}x^2 + o(x^2)$.

Pour mener cette question à bien il est nécessaire de connaître les quelques développements limités nécessaires, en fait trois : sin (x), cos(x), et ln($1+x$) au voisinage de 0. Plusieurs étudiants n'ont par remarqué que puisqu'on divise par x, puis par x^2, pour obtenir un développement limité à l'ordre 2, il est nécessaire de partir d'un développement limité à l'ordre 5 de la fonction tangente.



(le graphe de f est en rouge, celui de la partie principale du développement limité est en vert)

4. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

C'est une application simple du développement limité : on peut prolonger par continuité la fonction en posant $f(0)= 5/6$.

5. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0.

C'est une application simple du développement limité : la fonction est dérivable en 0 car il y a un développement limité à l'ordre 1 et $f'(0)= 0$ car le coefficient de x dans le développement limité est nul.

6. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

C'est une application simple du développement limité : la courbe est au-dessus de sa tangente en 0 car le coefficient de x^2 dans le développement limité est strictement positif.

Remarque Cependant, de manière générale, l'existence, pour *f*, d'un développement limité à un ordre $n \geq 2$ en 0, n'entraîne pas des propriétés de dérivabilité à des ordres $k \geq 2$. Regardez, par exemple, la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour plus de détail, consultez le line ci-dessous.

Référence Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)
Module « développements limités », *apprendre*, rubrique « applications aux études locales », précisément la page
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/dev_limites/apprendre/chapitre7/titre1-1det.htm
Il y a aussi dans la partie *s'exercer* des exercices analogues et des études locales de courbes dans la partie *observer*.

Exercice 5.
Soit *f* la fonction définie sur **R** par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in$ **R**, $|f(x)| \leq |x|$

Si *x* est nul, l'inégalité est bien vérifiée, sinon le fait que sin(1/*x*) est compris entre -1 et 1 permet de conclure.

ATTENTION : un erreur fréquemment relevée : $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$, évidemment ceci n'est vrai que pour *x* positif, sinon il faut inverser le sens des inégalités.

2. Montrer que *f* est continue sur **R**.

Si *x* est non nul, la fonction est continue comme produit et composée de fonction continue. En 0, le sinus étant borné, on a : $\lim_{x\to 0}|f(x)| = 0 = f(0)$.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in$ **R** et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in N}$ est monotone et convergente.

On a $|u_{n+1}| = \left| u_n \sin \frac{1}{u_n} \right| \leq |u_n|$. Donc la suite $(|u_n|)_{n\in N}$ est décroissante, comme de plus elle est minorée par 0 elle est convergente.

ATTENTION : dans encore trop de copies on trouve « donc la suite converge vers 0 », on n'en sait rien, on sait seulement qu'elle converge vers un nombre positif ou nul.
Certains ont aussi trouvé que la suite était croissante minorée donc convergente…

4. En remarquant que *f* est paire, montrer que

$$u_{n+1} = f(|u_n|) \qquad n \in N .$$

En déduire que $(u_n)_{n\in N}$ est convergente. On notera *l* sa limite.

La fonction *f* est paire, en effet : *f*(-*x*)=*f*(*x*).
Donc : $u_{n+1} = f(u_n) = f(-u_n) = f(|u_n|)$.
Or, la suite $(|u_n|)_{n\in N}$ est convergente et la fonction *f* est continue, soit en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, il vient que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est également convergente.

5. Montrer que *l* vérifie nécessairement

$$l = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{l}\right) = 1$$

En déduire que

$$l \in \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbf{Z} \right\}$$

Soit *l* la limite, comme la fonction *f* est continue, il vient *f*(*l*)=*l*
Donc soit *l* = 0 soit $l \sin\left(\frac{1}{l}\right) = l$, d'où le résultat.

De plus, $\sin\left(\frac{1}{l}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{l} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow l = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in Z$

Remarque : Il y avait une coquille dans l'énoncé initial, il était écrit *k* dans **N** et non dans **Z.**

6. Etude de quelques cas particuliers.
a. Lorsque $u_0 = \frac{2}{5\pi}$, calculer les valeurs de u_n pour tout $n \in N$.

On a $u_1 = \frac{2}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2}{5\pi}$, une récurrence immédiate (mais nécessaire à mentionner car le calcul des premiers termes est insuffisant pour conclure) permet de conclure que la suite est constante égale à $\frac{2}{5\pi}$.

b. Lorsque $u_0 = \dfrac{2}{3\pi}$, calculer les valeurs de u_n pour tout $n \in N$.

On a $u_1 = \dfrac{2}{3\pi}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{3\pi}$ et $u_2 = -\dfrac{2}{3\pi}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{3\pi}$, une récurrence immédiate permet de conclure que la suite est constante à partir du rang 1 et égale à $-\dfrac{2}{3\pi}$.

c. Soit $k \in N$ et $u_0 = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ Quelles sont les limites de $(u_n)_{n\in N}$ et de $(|u_n|)_{n\in N}$?

On a

$$u_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}(-1)^k \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}(-1)^k \sin\left((-1)^k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}(-1)^k$$

Dans tous les cas, la suite est constante soit à partir du rang 0, si *k* est pair, soit à partir du rang 1 si *k* est impair.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{(-1)^k}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$.

Dans certaines copies on relève une preuve d'incohérence : à la question 4, on montre que la suite est convergente puis à la question 6, on trouve des suites oscillantes dans l'étude des cas particuliers.

Référence Université en Ligne (http://www.uel.cicrp.jussieu.fr)
Module « nombres réels, suites et fonctions », *apprendre*, rubrique «suites réelles/ Suites récurrentes, méthodes et exemples », précisément
http://www.uel.cicrp.jussieu.fr/uel/mathematiques/analyse1/apprendre/lessuites/7.htm

Voir aussi dans la partie *s'évaluer* les exercices « annales virtuelles ».