

Université Pierre et Marie Curie  
DEUG MIAS premier niveau  
Année 2002-2003

**Examen du module de mathématiques**  
**Janvier 2003**  
**Durée de l'épreuve : 3 heures**

*Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits durant l'épreuve. La rédaction doit être précise et concise. Toute réponse non justifiée sera considérée comme incorrecte.*

**Exercice 1.**

1. Énoncer le théorème de Rolle
2. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$  qui admet 3 racines réelles. Montrer que le polynôme  $P'$  admet au moins deux racines réelles et que le polynôme  $P''$  admet au moins une racine réelle

**Exercice 2.**

Soit  $P$  le polynôme défini par

$$P(X) = (X^2 + 3X)^2 + (3X + 5)^2$$

1. Calculer  $(1 + i)^2$ ,  $(1 - i)^2$ . Calculer  $(A + iB)(A - iB)$  pour  $A, B \in \mathbf{C}[X]$ .
2. Factoriser  $P$  en un produit de deux polynômes à coefficients complexes puis en un produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbf{C}[X]$ .
3. En déduire une décomposition de  $P$  en un produit de deux polynômes irréductibles dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 3.**

1. Calculer le P.G.C.D de 217 et 49.
2. Trouver tous les couples  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  tels que
$$217u + 49v = 7.$$
3. Peut-on trouver des couples  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  tels que
$$217u + 49v = 3 ?$$

**Exercice 4.**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) + 1 - \cos(x)}{x^2}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \setminus \{0\}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue et dérivable en tout point  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \setminus \{0\}$ .
2. Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction  $\tan(x)$ .
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $f(x)$ .
4. Montrer que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
5. Montrer que la fonction  $f$  ainsi prolongée est dérivable en 0.
6. Étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

**Exercice 5.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|f(x)| \leq |x|$

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite définie par son premier terme  $u_0 \in \mathbf{R}$  et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone et convergente.

4. En remarquant que  $f$  est paire, montrer que

$$u_{n+1} = f(|u_n|) \quad n \in \mathbf{N}.$$

En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente. On notera  $l$  sa limite.

5. Montrer que  $l$  vérifie nécessairement

$$l = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{l}\right) = 1$$

En déduire que

$$l \in \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

6. Étude de quelques cas particuliers.

a. Lorsque  $u_0 = \frac{2}{5\pi}$ , calculer les valeurs de  $u_n$  pour tout  $n \in N$ .

b. Lorsque  $u_0 = \frac{2}{3\pi}$ , calculer les valeurs de  $u_n$  pour tout  $n \in N$ .

c. Soit  $k \in N$  et  $u_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$  Quelles sont les limites de  $(u_n)_{n \in N}$  et de  $(|u_n|)_{n \in N}$  ?