Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2001-2002

Examen du module de mathématiques 111YA
23 janvier 2002
Durée de l'épreuve : 3 heures

ANALYSE

Question de cours
Enoncer le théorème des accroissements finis. On en précisera soigneusement les hypothèses.

Exercice1 Déterminer les limites suivantes si elles existent

a. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

Exercice1 Déterminer les limites suivantes si elles existent

b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(3x)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$

Exercice 2.Soit *f* l'application définie sur R par : $\forall x \in R,\ f(x)=\exp\left(\dfrac{x+2x^2}{1+x^2}\right)$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de exp *u* au voisinage de 0.

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{x+2x^2}{1+x^2}$ au voisinage de 0

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de *f*(*x*) au voisinage de 0

4. On note ***C*** la courbe d'équation *y*=*f*(*x*). Déduire de ce qui précède l'équation de la tangente à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0, ainsi que la position de ***C*** par rapport à cette tangente.

Exercice 3
Soit $f : R \to R$ une application qui vérifie : $\forall (x,y) \in R^2, |f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ (*)
1. Montrer que f est continue en tout point de R

2. Montrer que *f* est dérivable en tout point de R et expliciter sa dérivée *f'*. Pour cela, on reviendra à la définition du nombre dérivé.

3. Trouver toutes les applications *f* vérifiant la propriété (*)..

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} u_n$

1.a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

b. Quel est le signe de $u_5 - u_4$?

3.a. Montrer $\forall n \in N, u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}\left(u_{n+1} - u_n\right) - \dfrac{u_{n+1}}{2(n+1)(n+2)}$

b. En déduire $\forall n \in N \quad u_{n+2} - u_{n+1} \leq \dfrac{n+2}{2(n+1)}(u_{n+1} - u_n)$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante à partir d'un rang n_0 que l'on explicitera.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

ALGEBRE

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.

1. Montrer que les polynômes *P* et *P'* ne sont pas premiers entre eux si et seulement si *P* admet une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 2. (*P '* désigne le polynôme dérivé de *P*) .

On suppose dorénavant que *P* est un polynôme de degré 3 à coefficients réels de la forme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathrm{R}^3$.

2.a. Montrer que si un nombre complexe z est racine de P, $\bar{z}$ est aussi racine de P.

2.b. Montrer que si *P* admet une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à deux, celle-ci est réelle.

On suppose que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ et on pose $\Delta = 4b^3 + 27c^2$.

3. On note z_1, z_2, z_3 les racines complexes de *P*.

a. Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = -a$.

b. En déduire que si z_1, z_2 sont des nombres réels il en est de même pour z_3.

Soit $\tilde{P} = P(X - \frac{a}{3})$.

4.a. Expliciter les coefficients de $\tilde{P}$

4.b. Montrer que P admet une racine multiple si et seulement si $\tilde{P}$ en a une.

Désormais on suppose $a = 0$.
5. Dans cette question on suppose en outre $b = 0$ (d'où $\Delta = 27c^2$).
a. Calculer un PGCD (unitaire) de P et P'.

b. Les polynômes P et P' sont-ils premiers entre eux ?

6. Dans cette question, on suppose cette fois $b \neq 0$.
a. Premier cas $\Delta = 0$: déterminer un PGCD (unitaire) de P et P'.

b. Deuxième cas $\Delta \neq 0$: déterminer un PGCD (unitaire) de P et P'.

7. Déduire des questions précédentes que le polynôme $P = X^3 + bX + c$ admet une racine multiple si et seulement si $\Delta = 0$.

Questions hors barème

On note encore P l'application polynôme $\begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto P(x) \end{cases}$.

8.a. Etudier les variations de P en fonction du signe de b.

b. Tracer le graphe Γ de P en précisant suivant les valeurs de b et c combien de fois Γ coupe l'axe des abscisses.

c. Montrer que l'application P admet 3 racines réelles, éventuellement confondues, si et seulement si $\Delta \leq 0$.

On se propose de calculer les racines de P. Soit $z \in \mathbf{C}$ une racine de P.

9. Montrer l'existence de nombres complexes u et v tels que $u + v = z$ et $uv = -b/3$.

10.a. Montrer que u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + cX - \frac{b^3}{27}$.

b. Soit $\delta \in \mathbf{C}$ une racine carrée de $\frac{-\Delta}{27}$. Calculer u^3 et v^3 en fonction de δ.

11. On suppose $\Delta \leq 0$. Soit $\varsigma \in C$ une racine cubique de $\frac{1}{2}\left(-c + \frac{i\delta}{27}\right)$ et $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.
Montrer, de préférence sans calcul, que les trois racines de P sont

$$\varsigma + \overline{\varsigma},\ j\varsigma + \overline{j\varsigma},\ j^2\varsigma + \overline{j^2\varsigma}\ .$$