Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2001-2002

Examen du module de mathématiques 111YA
23 janvier 2002
Durée de l'épreuve : 3 heures

ANALYSE

Sujet : Une question de cours et plusieurs exercices indépendants

Domaine : Analyse premier semestre Deug 1
Outils

- Techniques simples de calcul de limites
- Développements limités
- Définition et application de la continuité et dérivabilité d'une fonction en un point
- Etude guidée de suite
  (voir par exemple les modules «Nombres réels, suites et fonctions », « Fonctions de classe C^n » et « Développements limités » d'Université en ligne sur le serveur pédagogique http://savoirenligne.paris6.jussieu.fr).

> Il s'agit de plusieurs exercices indépendants sur un domaine restreint du cours. Il faut donc se fixer un temps limité pour chercher chaque exercice et commencer par ceux qu'on préfère.
> Les encadrés comme celui-ci sont des commentaires.
> On y trouvera aussi des indications et des conseils permettant d'éviter des erreurs, rencontrées dans des copies.

Question de cours
Enoncer le théorème des accroissements finis. On en précisera soigneusement les hypothèses.

Soit f une application de l'intervalle $[a,b]$ dans R ($a < b$), vérifiant les conditions suivantes : (i)
f est continue sur $[a,b]$,

(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

On peut aussi énoncer le théorème des accroissements finis sous la forme suivante
(I n'est plus nécessairement fermé, borné)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point de I ; alors, pour tout réel h tel que $x_0+h\in I$, il existe un nombre $\theta\in]0;1[$ tel que : $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$

Trop peu de copies ont su donner un énoncé correct, les hypothèses sont approximatives ou encore le réel c (ou θ) n'est pas introduit on ne sait pas dans quel ensemble il se trouve. Il est indispensable d'apprendre impeccablement les théorèmes du cours.

Exercice1 Déterminer les limites suivantes si elles existent

a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

Lorsque x tend vers 4, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit donc d'une forme indéterminée. Un moyen simple (et pas nouveau) de lever l'indétermination est de multiplier par les quantités conjuguées en haut et en bas .

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

Quand x tend vers 4, le quotient tend vers 3/2 d'où la valeur de la limite.

Exercice1 Déterminer les limites suivantes si elles existent

b. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x)}{x-\frac{\pi}{3}}$

Ici aussi il s'agit d'une forme indéterminée « 0/0 » qu'on peut lever en posant $h = x - \frac{\pi}{3}$

On a alors $\dfrac{\sin(3x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sin(3h+\pi)}{h} = \dfrac{-\sin(3h)}{h} = -3\dfrac{\sin(3h)}{3h}$.

Lorsque x tend vers π/3, h tend vers 0 et la quantité considérée admet –3 pour limite, car $\dfrac{\sin u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers0..

> Plusieurs copies ont dit que la limite n'existait pas parce que c'était une forme indéterminée. Le terme « forme indéterminée » signifie qu'il y a une difficulté, on ne peut pas a priori déterminer s'il y a une limite ou non. Tandis qu'un cas par exemple où il n'y a pas de limite est sin(x) lorsque x tend vers l'infini, la quantité oscille entre –1 et 1 et n'admet pas de limite.
> On aurait pu aussi utiliser la dérivée de la fonction sinus.

Exercice 2.Soit f l'application définie sur R par : $\forall x \in R,\ f(x) = \exp\left(\dfrac{x+2x^2}{1+x^2}\right)$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de exp u au voisinage de 0.

C'est à savoir par cœur

$$\exp u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \qquad \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

Il ne faut pas oublier de préciser que le terme ε(u) tend vers 0 quand u tend vers 0 sinon l'écriture n'apporte aucun renseignement.
On peut utiliser la notation o(u^2) encore faut-il savoir ce que cela veut dire : un o(u^2) est exactement une expression du type : $u^2\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{x+2x^2}{1+x^2}$ au voisinage de 0

Il s'agit d'effectuer une division suivant les puissances croissantes en s'arrêtant lorsque le reste est de degré au moins 3. Ce qui donne :

$$\frac{x+2x^2}{1+x^2} = (x+2x^2) - \frac{x^3+2x^4}{1+x^2} = x + 2x^2 - x^2\frac{x+2x^2}{1+x^2} = x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On peut aussi utiliser le développement de 1/(1+u) et composer avec x^2 puis faire le produit avec $(x+2x^2)$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0

On a, en substituant le développement limité obtenu à la question 2 dans celui de la question 1 :

$$f(x) = 1+(x+2x^2)+\frac{1}{2}(x+2x^2)^2+x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

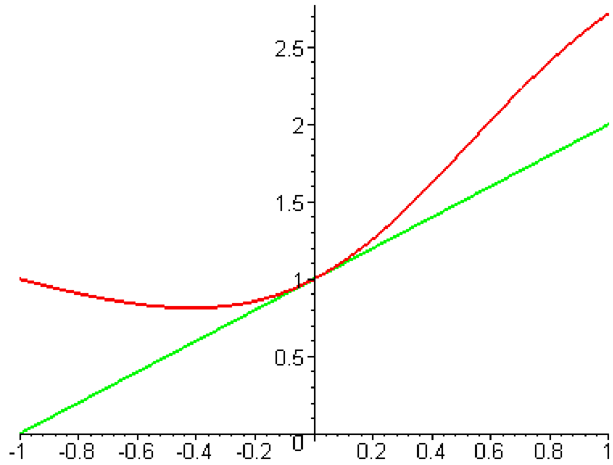
$$f(x) = 1+x+\frac{5}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

4. On note ***C*** la courbe d'équation $y=f(x)$. Déduire de ce qui précède l'équation de la tangente à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0, ainsi que la position de ***C*** par rapport à cette tangente.

Une équation de la tangente à la courbe est donnée par la partie affine du développement limité : $y=1+x$.

La différence entre l'équation de la courbe et de la tangente est positive au voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0, au voisinage de ce point.

Comme on utilise un développement limité, on ne peut affirmer qu'une propriété locale.


2.5
2
1.5
1
0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Exercice 3

Soit $f : R \to R$ une application qui vérifie : $\forall (x, y) \in R^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ (*)

1. Montrer que f est continue en tout point de R

On rappelle l'écriture symbolique de la continuité de *f* en un point *x* de R

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \forall y, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ici, on aura $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \sqrt{\varepsilon}$ ce qui donne une valeur du η cherché.

Cette question a été très mal traitée, elle a donné lieu à un « charabia » alors qu'il suffisait d'écrire clairement la définition

2. Montrer que *f* est dérivable en tout point de R et expliciter sa dérivée *f'*. Pour cela, on reviendra à la définition du nombre dérivé.

La définition du nombre dérivé est la valeur, si elle existe, de la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ lorsque *h* tend vers 0.

La relation (*), appliquée avec $y=h$, donne : $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < |h|$. Le taux d'accroissement admet donc 0 comme limite quand h tend vers 0 et ceci en tout point x . Donc la fonction est dérivable et sa dérivée est nulle

3. Trouver toutes les applications f vérifiant la propriété (*)..

D'après la question précédente, ces fonctions sont dérivables de dérivée nulle donc elles sont constantes, réciproquement, toute fonction constante convient.

Il ne faut pas oublier de vérifier que réciproquement les fonctions trouvées conviennent car on n'a pas raisonné par équivalence.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} u_n$

1.a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
  b. Quel est le signe de $u_5 - u_4$?

On a $u_1=2$; $u_2= 5/2$; $u_3= 8/3$; $u_4 = 8/3$ et $u_5= 13/5$
Et $u_5-u_4=-1/15$ donc négatif.

La seule difficulté est de faire attention à l'indice, pour calculer u_1, il faut faire n=0 dans la formule.

2. Montrer par récurrence : $\forall n \in N, u_n \geq 0$.

Soit P_n la propriété « u_n est positive ». La propriété est vraie pour $n=0$ puisque $u_0=1$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre *n* et montrons-la à l'ordre $n+1$: d'après la formule
$u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} u_n$, qui est une somme et produit de nombres positifs, donc u_{n+1} est positif.
La propriété est donc vraie pour tout entier *n*.

Certaines copies disent pour montrer l'hérédité de la propriété : « supposons . $\forall n \in N, u_n \geq 0$ », il n'y a alors plus rien à démontrer.

3.a. Montrer $\forall n \in N, u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(u_{n+1} - u_n) - \frac{u_{n+1}}{2(n+1)(n+2)}$

b. En déduire $\forall n \in N \quad u_{n+2} - u_{n+1} \leq \frac{n+2}{2(n+1)}(u_{n+1} - u_n)$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir d'un rang n_0 que l'on explicitera.

3 a. Il faut faire le calcul

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)}u_{n+1} - \frac{n+2}{2(n+1)}u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(u_{n+1} - u_n) - \left[-\frac{n+3}{2(n+2)} + \frac{n+2}{2(n+1)}\right]u_{n+1}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)}(u_{n+1} - u_n) - \frac{u_{n+1}}{2(n+1)(n+2)}$$

3b. Le second membre de la différence étant positif, on en déduit l'inégalité demandée.

3.c D'après la question 1b, on sait que u_5-u_4 est négatif , et d'après la question 3b ci-dessus, cette différence sera donc négative pour tout rang supérieur. La suite est donc décroissante à partir du rang 4.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

La suite est décroissante, positive donc minorée par 0, elle est donc convergente.

5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit l cette limite, un passage à la limite dans l'expression $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} u_n$ donne :

$l = 1 + \dfrac{1}{2} l$ ce qui donne $l = 2$.

A remarquer : le passage à la limite et le fait de noter l la limite ne sont possibles qu'à partir du moment où on a montré que la suite est convergente et donc que cette limite l existe.

ALGEBRE

Problème : Racines d'un polynôme de degré 3

Domaine : algèbre

Outils

- Nombres complexes, conjugaison
- Polynômes : racine, racine multiple, lien avec le polynôme dérivé, pgcd, algorithme d'Euclide, factorisation, relations coefficients-racines
  (voir par exemple le module « polynômes » d'Université en ligne sur le serveur pédagogique http://savoirenligne.paris6.jussieu.fr).

> Il s'agit d'un problème, donc une question peut utiliser les résultats d'une question précédente (c'est plusieurs fois le cas). Si on ne sait pas résoudre la question *n*, il est souvent possible de passer à la question suivante, en admettant le résultat.
> Les encadrés comme celui-ci sont des commentaires.
> On y trouvera aussi des indications et des conseils permettant d'éviter des erreurs, rencontrées dans des copies.

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.

1. Montrer que les polynômes *P* et *P'* ne sont pas premiers entre eux si et seulement si *P* admet une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 2. (*P '* désigne le polynôme dérivé de *P*) .

Soit a une racine de *P* d'ordre n (n entier positif), cela veut dire qu'il existe un polynôme Q tel que $P=(X-a)^n Q$ avec $Q(a) \neq 0$ alors $P' = n(X-a)^{n-1}Q + (X-a)^n Q' = (X-a)^{n-1}(nQ + (X-a)Q')$.

Si a est racine multiple de *P* (c'est-à-dire $n>1$), a est racine commune à *P* et *P'* qui ne sont donc pas premiers entre eux.

Réciproquement si *P* et *P'* ne sont donc pas premiers entre eux, leur PGCD est non constant et admet (théorème de d'Alembert) une racine dans C, c'est une racine commune à *P* et *P'*, appelons-la a. Le calcul précédent montre que sa multiplicité n est nécessairement au moins 2.

On demande *si et seulement si*, n'oubliez pas la réciproque.

On suppose dorénavant que *P* est un polynôme de degré 3 à coefficients réels de la forme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathrm{R}^3$.

2.a. Montrer que si un nombre complexe z est racine de P, $\bar{z}$ est aussi racine de P.

Si $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathrm{R}^3$, on a

$\overline{P(z)} = \overline{uz^3 + az^2 + bz + c} = u\bar{z}^3 + a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = P(\bar{z})$ et donc z est racine de *P* si et seulement si $\bar{z}$ l'est.

Poser $z = a + ib$ a souvent conduit a des calculs inextricables.

2.b. Montrer que si P admet une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à deux, celle-ci est réelle.

Si z est racine d'ordre 2 (au moins) de P, cela veut dire qu'il existe un polynôme Q (à coefficients complexes) tel que $P=(X-z)^2Q$; en prenant le conjugué, on obtient (P est à coefficients réels) $P=\overline{P}=(X-\overline{z})^2\overline{Q}$: $\overline{z}$ est aussi racine (déjà vu en a.) et la multiplicité de $\overline{z}$ est au moins 2 .

Si z n'est pas réelle, $\overline{z}\neq z$, les polynômes $(X-z)^2$ et $(X-\overline{z})^2$ divisent P, ils sont premiers entre eux, donc (lemme de Gauss) leur produit, qui est de degré 4, divise P, de degré 3 : c'est impossible et z est réelle.

> La démonstration comprend deux parties : montrer que si z est racine, $\overline{z}$ l'est et ensuite on démontre (par l'absurde) que $z=\overline{z}$.

On suppose que $P=X^3+aX^2+bX+c$ avec $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ et on pose $\Delta=4b^3+27c^2$.

3. On note z_1,z_2,z_3 les racines complexes de P.

a. Montrer que $z_1+z_2+z_3=-a$.

Comme P est unitaire on a $P=(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$, on développe

$P=X^3-(z_1+z_2+z_3)X^2+?X+?$.

En identifiant on obtient $z_1+z_2+z_3=-a$.

b. En déduire que si z_1, z_2 sont des nombres réels il en est de même pour z_3.

Cela résulte immédiatement de l'égalité $z_1 + z_2 + z_3 = -a$.

Soit $\tilde{P} = P(X - \frac{a}{3})$.

Comprendre la notation

Si elle paraît ambiguë : « est-ce un produit ? ou est-ce que cela veut dire que $(X - \frac{a}{3})$ est substitué à X ? », une façon de lever le doute est de remarquer que dans le premier cas, on obtient un polynôme de degré 4 et on sort du cadre du problème.

Vous pouvez bien sûr utiliser la notation $P(X)$ si elle vous paraît plus claire.

4.a. Expliciter les coefficients de $\tilde{P}$

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{P} &= (X - \frac{a}{3})^3 + a(X - \frac{a}{3})^2 + b(X - \frac{a}{3}) + c \\
&= X^3 - 3aX^2/3 + 3a^2X/9 - a^3/27 + a(X^2 - 2aX/3 + a^2/9) + b(X - a/3) + c \\
&= X^3 + (-a^2/3 + b)X + (2a^3/27 - ab/3 + c)
\end{aligned}$$

4.b. Montrer que P admet une racine multiple si et seulement si $\tilde{P}$ en a une.

$P=(X-z)^2 Q \Leftrightarrow \tilde{P}=P(X-a/3)=(X-(z+a/3))^2 Q(X-a/3)$ donc z est racine multiple de P si et seulement si $z+a/3$ est racine multiple de $\tilde{P}$.

Là aussi, il y a un *si et seulement si*, raisonner par équivalence ou bien faire les deux sens.

Désormais on suppose $a = 0$.
5. Dans cette question on suppose en outre $b = 0$ (d'où $\Delta = 27c^2$).
a. Calculer un PGCD (unitaire) de P et P'.

De $P=X^3+c$ on déduit $P'=3X^2$, les seuls diviseurs unitaires de P' sont donc 1, X et X^2.
Si $c = 0$, P et P' ont pour PGCD X^2.
Si $c \neq 0$, P et P' ont pour PGCD 1.

On peut aussi (comme il faudra le faire à la question suivante) utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD.
L'énoncé dit « *un* PGCD (unitaire) », la condition *unitaire* rend le PGCD unique.
La définition de *unitaire* est dans le cours : cela veut dire que le coefficient du terme de plus haut degré est 1.
Il fallait penser à discuter selon *c*.

b. Les polynômes P et P' sont-ils premiers entre eux ?

P et P' sont donc premiers entre eux si et seulement si $c \neq 0$, ce qui est équivalent à $\Delta = 27c^2 \neq 0$.

Bien sûr, on ne recommence pas, on utilise le calcul fait à la question précédente.

6. Dans cette question, on suppose cette fois $b \neq 0$.
a. Premier cas $\Delta = 0$: déterminer un PGCD (unitaire) de P et P'.

De $P = X^3 + bX + c$ on déduit $P' = 3X^2 + b$.
On utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD, on divise P par P' :

$$P = (3X^2 + b)\frac{X}{3} + (\frac{2b}{3}X + c).$$

Puis on divise P' par le reste obtenu

$$3X^2 + b = (\frac{2b}{3}X + c)(\frac{9b}{2}X - \frac{27c}{4b^2}) + (b + \frac{27c^2}{4b^2}) = (\frac{2b}{3}X + c)(\frac{9}{2b}X - \frac{27c}{4b^2}) + \frac{\Delta}{4b^2}$$

Si $\Delta = 0$, le deuxième reste est nul, et le PGCD est le dernier reste, rendu unitaire : $X + \dfrac{3c}{2b}$.

b. Deuxième cas $\Delta \neq 0$: déterminer un PGCD (unitaire) de *P* et *P'*.

Si $\Delta \neq 0$ le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide est constant donc le PGCD est 1 .

7. Déduire des questions précédentes que le polynôme $P = X^3 + bX + c$ admet une racine multiple si et seulement si $\Delta = 0$.

Combinant les questions 1, 4, 5 et 6, on en déduit que *P* admet une racine multiple si et seulement si $\tilde{P}$ en a une, ce qui permet de se ramener au cas $a = 0$. *P* admet une racine multiple si et seulement le PGCD de *P* et P' n'est pas 1, si et seulement si $\Delta = 0$.
Si $b = 0$, cette racine est 0 (triple), si $b \neq 0$ cette racine est $-3c/2b$ (elle est bien réelle comme démontré en 2.).

Questions hors barème

Quelques coquilles de l'énoncé initial ont été rectifiées et une remarque historique a été ajoutée.

On note encore P l'application polynôme $\begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto P(x) \end{cases}$.

On quitte le domaine de l'algèbre formelle pour l'étude d'une fonction à valeurs réelles puis des calculs dans **C.**

8.a. Etudier les variations de P en fonction du signe de b.

On a $P'(x) = 3x^2 + b$ donc

- Si $b \geq 0$, P est strictement croissante, on a le tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $b < 0$, P ' s'annule en $d = \sqrt{\dfrac{-b}{3}}$ et $-d$ et on a le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-d$		d		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(-d)$	$\searrow$	$P(d)$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut bien sûr traiter les deux alinéas 10.a. et 10.b. en même temps.

b. Tracer le graphe Γ de P en précisant suivant les valeurs de b et c combien de fois Γ coupe l'axe des abscisses.

- Si $b \geq 0$, P est strictement croissante. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P s'annule au moins une fois, et une seule puisque la fonction est strictement croissante. La racine est simple, sauf si $b = c = 0$ (0 est alors racine triple).

- Si $b < 0$, P ' admet un minimum (local) en $d = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ et un maximum (local) en $-d$. Il y a

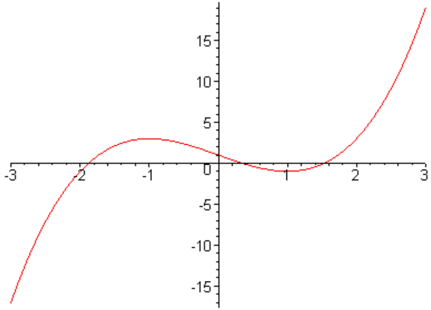
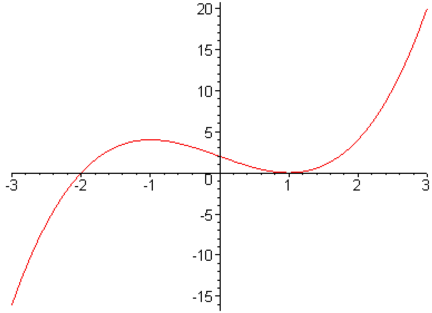
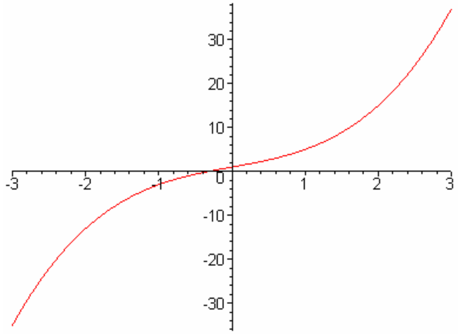
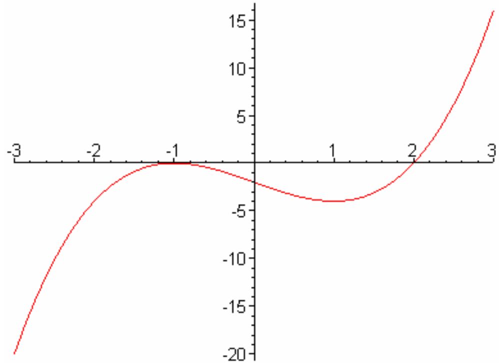
  - **3 racines** si $P(-d) > 0$, $P(d) < 0 \Leftrightarrow P(-d)P(d) < 0$.

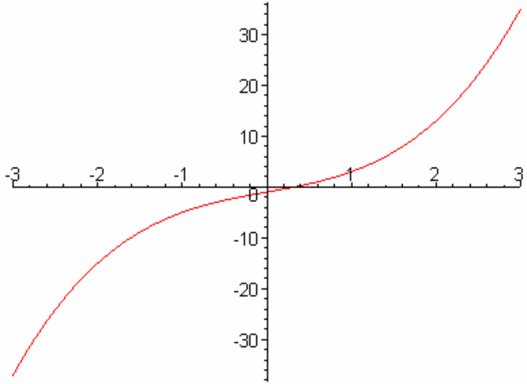
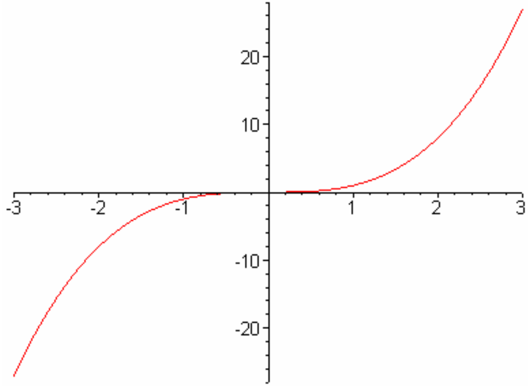
or $P(-d)P(d) = (\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}} + c)(-\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}} + c) = -\frac{4b^3}{27} + c^2 = -\frac{\Delta}{27}$.

Donc il y a trois racines si et seulement si $\Delta > 0$.

  - **2 racines** (dont une double) **si** $P(-d)P(d) = 0$, c'est-à-dire $\Delta = 0$,

  - **1 racine** si $P(-d)P(d) > 0$, c'est-à-dire $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \quad (b = -3, c = 1, \Delta = -81)$	$\Delta = 0\,,\, c > 0 \quad (b = -2, c = 3)$
	
$\Delta > 0\,,\, c > 0 \;\; (b = 3, c = 1, \Delta = 135)$	$\Delta = 0\,,\, c < 0\, (b = -2, c = -3)$
	

$\Delta > 0$, $c < 0$ $(b = 3, c = -1, \Delta = 135)$	$\Delta = 0$, $c = 0, b = 0$
	

Les graphes ont été obtenus sous Maple avec les instructions,

```
> p:=(x,b,c)->x^3+b*x+c;
```

$$p := (x, b, c) \to x^3 + b\,x + c$$

```
> Delta:=(b,c)->4*b^3+27*c^2;
```

$$\Delta := (b, c) \to 4\,b^3 + 27\,c^2$$

```
> b:=-3;c:=1;Delta(b,c);plot(p(x,b,c),x=-3..3);
```

$$b := -3$$

$$c := 1$$

$$-81$$

………

N'importe quel logiciel permettant de tracer une courbe suffit et l'interdiction (rétrograde, avis de l'auteur de ce corrigé) des calculatrices n'était pas gênante puisqu'il s'agit de donner l'allure d'un graphe plus que de tracer un graphe précis.

c. Montrer que l'application P admet 3 racines réelles, éventuellement confondues, si et seulement si $\Delta \leq 0$.

Il résulte de l'étude précédente que P a 3 racines réelles (confondues ou non) si $\Delta \leq 0$

On se propose de calculer les racines de P. Soit $z \in \mathbf{C}$ une racine de P.

9. Montrer l'existence de nombres complexes u et v tels que $u + v = z$ et $uv = -b/3$.

u et v existent : ce sont les racines de l'équation $X^2 - zX + \dfrac{b}{3}$.

C'est classique : u et v sont donnés par leur somme et leur produit

10.a. Montrer que u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + cX - \dfrac{b^3}{27}$.

On a $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + bz = -c$ et $u^3.v^3 = \dfrac{-b^3}{27}$, u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + cX - \dfrac{b^3}{27}$.

Dans $u^3 +\ v^3$ on reconnaît le début du cube d'une somme et on fait apparaître les termes manquants, judicieusement regroupés.

b. Soit $\delta \in \mathbf{C}$ une racine carrée de $\dfrac{-\Delta}{27}$. Calculer u^3 et v^3 en fonction de δ.

Le discriminant du trinôme précédent est $c^2 + \dfrac{4b^3}{27} = \dfrac{\Delta}{27}$, on en déduit que

$$\{u^3, v^3\} = \left\{-\frac{c}{2} \pm \frac{i\delta}{2.}\right\}.$$

On ne peut bien sûr pas dire a priori quelle est la valeur de u^3 et de v^3.

11. On suppose $\Delta \leq 0$. Soit $\varsigma \in C$ une racine cubique de $\dfrac{1}{2}\left(-c + \dfrac{i\delta}{27}\right)$ et $j = \exp(\dfrac{2i\pi}{3})$.

Montrer, de préférence sans calcul, que les trois racines de P sont

$$\varsigma + \overline{\varsigma},\ j\varsigma + \overline{j\varsigma},\ j^2\varsigma + \overline{j^2\varsigma}.$$

On a alors $\{u^3, v^3\} = \left\{\dfrac{1}{2}\left(-c \pm \dfrac{i\delta}{27}\right)\right\} = \{\varsigma^3, \overline{\varsigma^3}\}$.

Supposons par exemple que $u^3 = \varsigma^3$, on a 3 valeurs possibles pour u : $\varsigma, \varsigma^2, \varsigma^3$. On déduit les valeurs correspondantes de v de la relation $uv = \frac{b}{3} = \sqrt[3]{\frac{b^3}{27}} = \sqrt[3]{(\varsigma\overline{\varsigma})^3} = \varsigma\overline{\varsigma}$ puisque $\varsigma\overline{\varsigma}$ est réel. On en déduit que les solutions sont $\begin{cases} u = \varsigma & v = \overline{\varsigma} & z_1 = \varsigma + \overline{\varsigma} \\ u = j\varsigma & v = \overline{j}\,\overline{\varsigma} & z_2 = j\varsigma + \overline{j}\,\overline{\varsigma} \\ u = j^2\varsigma & v = \overline{j^2}\,\overline{\varsigma} & z_3 = j^2\varsigma + \overline{j^2}\,\overline{\varsigma} \end{cases}$.

On constate que ces valeurs sont bien réelles et que prendre $u^3 = \overline{\varsigma}^3$ aurait bien donné le même résultat.

Remarque

Dans le cas $\Delta > 0$, il y a une racine réelle z ; on peut reprendre le calcul précédent : on montre l'existence de nombres u et v tels que $u + v = z$ et $uv = -b/3$. Ce sont les racines du trinôme $X^2 - zX + \frac{b}{3}$.

On montre comme ci-dessus que u^3 et v^3 sont les racines du trinôme $X^2 + cX - \frac{b^3}{27}$. Le discriminant est $c^2 + \frac{4b^3}{27} = \frac{\Delta}{27}$, on en déduit que $\{u^3, v^3\} = \left\{-\frac{c}{2} \pm \frac{\delta}{2}\right\}$ où $\delta = \sqrt{\frac{\Delta}{27}}$.

On a alors (à l'ordre près) : $u = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{\delta}{2}}$ et $v = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{\delta}{2}}$ d'où $z = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{\delta}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{\delta}{2}}$

ce qui en explicitant nous donne la formule

$$z = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^3 + 27c^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^3 + 27c^2}{27}}}$$

formule trouvée par J.Cardan au 16$^{\text{ème}}$ siècle.