

Examen du module de mathématiques 1
20 janvier 2004
Durée de l'épreuve : 3 heures

Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits durant l'épreuve. La rédaction doit être précise et concise. Toute réponse non justifiée sera considérée comme incorrecte.

Question de cours (barème indicatif : 4)

Soient a et b deux entiers naturels, on note d leur pgcd.

- 1) Énoncer le théorème de Bézout.
- 2) Application : on prend $a = 123$ et $b = 18$.
 - a. Déterminer le pgcd d de a et b .
 - b. Existe-t-il des couples d'entiers $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $123u + 18v = 3$? Si oui les déterminer tous.
 - c. Existe-t-il des couples d'entiers $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $123u + 18v = 91$? Si oui les déterminer tous.

Exercice 1 (barème indicatif : 4)

On considère les suites (définies pour n entier strictement positif) de termes généraux respectifs

- a. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\sqrt{n})$,
- b. $v_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$,
- c. $w_n = \sqrt{n} - n + 3$,
- d. $x_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Dire lesquelles sont convergentes (justifier votre réponse).

Exercice 2 (barème indicatif : 5)

On considère le polynôme $P = X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 - 3X + 1$.

Soit a un nombre complexe.

- 1) Montrer que si a est racine du polynôme P alors le conjugué $\bar{a}$ de a est aussi racine de P .
- 2) Montrer que si a est racine du polynôme P alors l'inverse $\frac{1}{a}$ de a est aussi racine de P .
- 3) Vérifier que $1 + i$ est racine de P .
- 4) Déterminer toutes les racines de P .
- 5) En déduire
 - a. la factorisation de P en facteurs de degré 1 à coefficients complexes,
 - b. la factorisation de P en facteurs de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 3 (barème indicatif : 6)

Soit la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x \cos x - \sin x$.

- 1) Dresser le tableau des variations de f .
- 2) Déterminer l'image $f([0, 2\pi])$ de f .
- 3) Soit n un entier naturel non nul fixé, montrer qu'il existe un unique réel u_n dans $[0, 2\pi]$ tel que

$$f(u_n) = \frac{1}{n}.$$
- 4) Montrer que la suite u_n , définie pour n strictement positif, est convergente vers une limite notée l .
- 5) Montrer que $l \in \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Exercice 4 (barème indicatif : 6)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{1/x}} \text{ pour } x \neq 0 ; \text{ et } f(0) = 0.$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
b) Montrer que f est continue en 0.
- 2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
b) Montrer que f possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 0 dont on donnera les valeurs.
c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- 3) On pose $u = 1/x$.
a) Exprimer la fonction $g(u)$ telle que $g(u) = f(x)$.
b) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $ug(u)$.
c) En déduire l'existence de trois réels a, b, c dont on précisera les valeurs tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Facultatif (hors barème)

- d) Conclure à l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$. On donnera l'équation de cette asymptote et on précisera la position de la courbe par rapport à cette asymptote.