Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS premier niveau
Année 2003-2004

Examen du module de mathématiques 1
20 janvier 2004
Corrigé

Question de cours (barème indicatif : 4)

Soient *a* et *b* deux entiers naturels, on note *d* leur pgcd.

1) Énoncer le théorème de Bézout.

Si *a* et *b* sont deux entiers naturels non tous deux nuls, de pgcd *d*, il existe un couple d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tel que $au+ bv= d$.

Variante

Si *a* et *b* sont deux entiers naturels non tous deux nuls, de pgcd *d* et *n* un entier, il existe un couple d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tel que $au+ bv= n$ si et seulement si *n* est un multiple de *d*.

Remarque

On peut lever la restriction *a* et *b* non tous deux nuls grâce à la définition pgcd(0,0) = 0.

2) Application : on prend a =123 et b = 18.
   a. Déterminer le pgcd *d* de *a* et *b*.

Soit on écrit 123 = 3x41 et 18 = 3x6. Comme 41 est premier, on en déduit que d = 3.
Soit on écrit l'algorithme d'Euclide (qui va nous servir pour déterminer les coefficients de Bézout)

123	18
15	6

18	15
3	1

15	3
0	5

Le dernier reste non nul est 3, donc d = 3.

   b. Existe-t-il des couples d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $123u+18v=3$? Si oui les déterminer tous.

La réponse est oui d'après le théorème de Bézout.
Déterminons tous les couples solutions.
On a 3 = 18 -15 et 15 = 123 – 18x6. On en déduit 3 = 18 – (123 – 18x6) = 18x7 – 123 = 126 – 123.
Donc une solution est (-1, 7).
Cherchons-les toutes.
Soit (u,v) une autre solution.
On a $123u+18v$ = 3 et 123x(-1)+ 18x7 = 3.
Par soustraction on en déduit 123(u+1)+18(v-7) = 0, qui, après division par le pgcd 3, donne 41(u+1)+6(v-7) = 0, qui s'écrit 41(u+1) = -6(v-7). 41 divise donc 6(v-6).
Comme 41 est premier à 6, d'après le lemme de Gauss, 41 divise (v-7) et il existe un entier k tel que v = 6+41k. On en déduit alors u+1=-6k.
L'ensemble des solutions est $\{(-1-6k, 7+41k)\ ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

   c. Existe-t-il des couples d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $123u+18v$= 91 ? Si oui les déterminer tous.

91 = 7x13 n'est pas un multiple du pgcd 3 de 123 et 18, pour tout couple d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, 3 divise $123u+18v$ et il ne peut donc pas en exister de couple d'entiers $(u,v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tel que $123u+18v$= 91.

Exercice 1 (barème indicatif : 4)

Indiquer la nature des suites (définies pour n entier positif non nul) de termes généraux respectifs

a. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\sqrt{n})$,

On a la majoration $\left|\cos(\sqrt{n})\right| \leq 1$ qui implique $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, inégalité qui montre que $|u_n|$ et donc u_n converge vers 0.

b. $v_n = (-1)^n \cos(\frac{1}{n})$,

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $\cos(\frac{1}{n})$ tend vers 1, la suite extraite des termes de rang pair tend vers 1, la suite extraite des termes de rang impair tend vers -1,la suite (v_n) est donc divergente.

c. $w_n = \sqrt{n} - n + 3$,

Écrivons $w_n = n(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{3}{n})$. Le deuxième facteur du produit tend vers -1, multipliant par n , on obtient que le produit tend vers $-\infty$ et la suite est divergente, elle tend vers $-\infty$.

d. $x_n = n\sin(\frac{1}{n})$

Écrivons $x_n = \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$.

$\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ (dérivée de la fonction sinus à l'origine), on en déduit que la suite est convergente, de limite 1.

Exercice 2 (barème indicatif : 6)

On considère le polynôme $P = X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 - 3X + 1$.

Soit a un nombre complexe.

1) Montrer que si a est racine du polynôme P alors le conjugué $\bar{a}$ de a est aussi racine de P.

Le polynôme P est à coefficients **réels** donc $P(\bar{a}) = \overline{P(a)} = \bar{0} = 0$ et $\bar{a}$ est racine de P.

2) Montrer que si a est racine du polynôme P alors l'inverse $\frac{1}{a}$ de a est aussi racine de P.

Remarquons que puisque $P(0) = 1$, a n'est pas nul. On a alors

$$P\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{a}\right) + 1$$

$$= \frac{1 - 3a + \frac{9}{2}a^2 - 3a^3 + a^4}{a^4} = \frac{P(a)}{a^4} = 0$$

Donc $\frac{1}{a}$ est racine de P.

3) Vérifier que $1 + i$ est racine de P.

On a $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, $(1+i)^3 = 2i - 2$ et $(1+i)^4 = -4$, en reportant

$P(1+i) = -4 - 3(2i-2) + \frac{9}{2}(2i) - 3(i+1) + 1 = 0$ et $1+i$ est bien racine de P.

4) Déterminer toutes les racines de *P*.

On en déduit que 1+i, 1-i , $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$ et $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$ sont racines. Ces quatre nombres sont deux à deux distincts, *P* de degré 4 a au plus 4 racines distinctes, on les a donc toutes.

5) En déduire

a. la factorisation de *P* en facteurs de degré 1 à coefficients complexes,

$$P=(X-1-i)(X-1+i)\left(X-\frac{1+i}{2}\right)\left(X-\frac{1-i}{2}\right)$$

Cette factorisation est unique à l'ordre près.

b. la factorisation de *P* en facteurs de degré 2 à coefficients réels.

On regroupe les termes conjugués

$$P=(X^2-2X+2)(X^2-X+1+\frac{1}{2}).$$

Là aussi la factorisation est unique à l'ordre près.

Exercice 3 (barème indicatif : 6)

Soit la fonction *f* définie sur $[0,2\pi]$ par $f(x)=x\cos x-\sin x$.

1) Dresser le tableau des variations de *f*

Sur l'intervalle considéré, la fonction *f* est continue et dérivable comme produit et somme de fonctions continues et dérivables et $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

	0		π		2π
f'		-		+	
f	0	↘	$-\pi$	↗	2π

2) Déterminer l'image $f([0,2\pi])$ de *f* ?

L'image continue d'un intervalle fermé bornée est un intervalle fermé borné et $f([0,2\pi])=[Min\ f, Max\ f]=[-\pi,2\pi]$.

3) Soit *n* un entier naturel non nul fixé, montrer qu'il existe un unique réel u_n dans $[0,2\pi]$ tel que $f(u_n)=\frac{1}{n}$.

Sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction *f* est négative et il n'y a pas de réel répondant à la question. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue et dérivable *f* sur l'intervalle $[\pi,2\pi]$, il existe un réel u_n dans $[\pi,2\pi]$ tel que $f(u_n)=\frac{1}{n}$; la fonction étant strictement croissante sur cet intervalle, ce réel est unique dans l'intervalle $[\pi,2\pi]$.

On a bien montré l'existence d'un unique réel u_n dans $[0,2\pi]$.

4) Montrer que la suite u_n définie pour *n* strictement positif est convergente vers une limite notée *l*.

Montrons que la suite u_n est décroissante. Soit deux entiers *n* et *p* tels que $n>p$. Alors $1/n<1/p$ et $u_n<u_p$ puisque la fonction *f* est strictement croissante sur $[\pi,2\pi]$.

Ainsi la suite est décroissante. Comme elle est minorée par π, la suite est convergente. Soit *l* sa limite.

5) Montrer que $l \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

La fonction *f* étant continue, on a par passage à la limite dans l'égalité $f(u_n) = \frac{1}{n}$, *f*(*l*)=0.

Or $f(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{5\pi}{4} - 1) < 0$ et $f(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a bien : $l \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 4 (barème indicatif : 6)

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{1/x}} \text{ pour } x \neq 0 \text{ ; et } f(0) = 0.$$

1) a) Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et quotient de fonctions continues.

b) Montrer que *f* est continue en 0.

Quand *x* tend vers 0_+, $e^{1/x} \xrightarrow[x \to 0_+]{} +\infty$ et $\frac{x}{2 + e^{1/x}} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0$.

Quand *x* tend vers 0_-, $e^{1/x} \xrightarrow[x \to 0_-]{} 0$ et $\frac{x}{2 + e^{1/x}} \xrightarrow[x \to 0_-]{} 0$ ainsi que $f(x)$.

Dans les deux cas on bien $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$; la fonction est donc continue en 0.

2) a) Montrer que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.

b) Montrer que *f* possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 0 dont on donnera les valeurs.

Pour savoir si *f* possède une dérivée à droite en 0 il faut étudier $\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{x}$.

Or $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2 + e^{1/x}} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0$. Dons la fonction est dérivable à droite en 0 de dérivée 0.

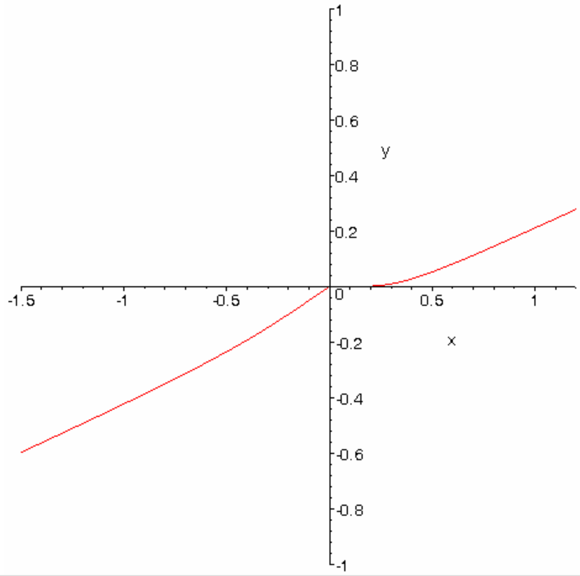
Pour savoir si *f* possède une dérivée à gauche en 0 il faut étudier $\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x)}{x}$.

Or $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2 + e^{1/x}} \xrightarrow[x \to 0_-]{} \frac{1}{2}$. Dons la fonction est dérivable à gauche en 0 de dérivée 1/2.

c) La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ?

La fonction n'est pas dérivable en 0 car les dérivées à droite et à gauche ne sont pas égales.

Illustration : graphe de *f* au voisinage de 0.



3) On pose $u=1/x$

a) Exprimer la fonction $g(u)$ telle que $g(u)=f(x)$

On a : $f(x)=\dfrac{x}{2+e^{1/x}}=\dfrac{1}{u(2+e^u)}=g(u).$

b) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $ug(u)$;

Au voisinage de 0 :

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)\ \text{ avec } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$$

$$2+e^u=3+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)\ \text{ avec } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{1+h}=1-h+h^2+h^2\varepsilon(h)\ \text{ avec } \varepsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2+e^u}=\frac{1}{3(1+u/3+u^2/6+u^2\varepsilon(u)}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{u}{3}-\frac{u^2}{6}+\frac{u^2}{9}\right]+u^2\varepsilon(u)\ \text{ avec } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$$

$$\frac{1}{2+e^u}=\frac{1}{3}-\frac{u}{9}-\frac{u^2}{54}\varepsilon(u)\ \text{ avec } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0.$$

c) En déduire l'existence de trois réels *a*,*b*,*c* dont on précisera les valeurs tels que

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right);\ \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Soit en remplaçant *u* par 1/*x :*

$$g(u)=\frac{1}{3u}-\frac{1}{9}-\frac{u}{54}+u\varepsilon(u)\ \text{ avec } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$$

$$f(x)=\frac{x}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{54x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[(1/x)\to 0]{}0$$

d) Conclure à l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction *f* lorsque *x* tend vers $+\infty$. On donnera l'équation de cette asymptote et on précisera la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Ainsi la courbe admet une asymptote quand *x* tend vers $+\infty$ d'équation $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{9}$ et elle est située au dessous de la courbe.

Illustration : allure du graphe de *f*.