Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS 12

Mathématiques 1
2001-2002

Nom : **Groupe :**

Contrôle numéro 1 (durée 2 heures)

Répondre sur la feuille

1. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A une partie de E. Cochez les bonnes réponses (on ne justifiera pas les réponses) :

On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$	Vrai ☒	Faux ☐
On a toujours	Vrai ☐	Faux ☒

Démonstration (elle n'était pas demandée)

La première inclusion est vraie, en effet

$f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \,, \exists y \in f(A) \,, f(x) = y\} = \{x \in E \,,\, f(x) \in f(A)\}$, condition vérifiée pour x appartenant à A.

La seconde est fausse : prenons par exemple $E = F = \mathbf{R}$, $A = [0\,,\,1]$ et pour application f la fonction valeur absolue, on a alors $f^{-1}(f([0,1])) = [-1,1] \not\subset [0,1]$.

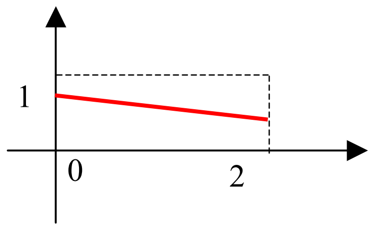
f une application $I \to J$. Traduisez en langage symbolique (avec des quantificateurs) les phrases suivantes et donnez (par son graphe) un exemple illustrant chacune.

f est injective

$\forall (x,x') \in I \times I \,,\, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

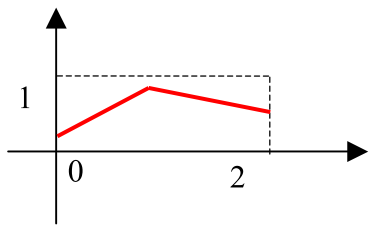
ou

$\forall (x,x') \in I \times I \,,\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$



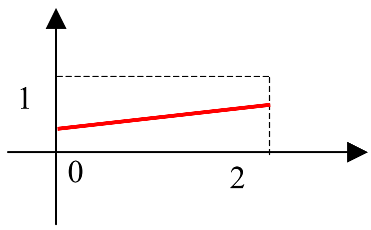
f n'est pas injective

$\exists (x,x') \in I \times I \,,\, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$



f n'est pas surjective

$\exists y \in J \,, \forall x \in I \,,\, f(x) \neq y$

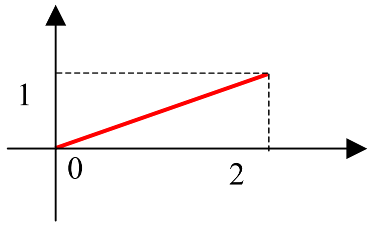


f est bijective

$\forall (x,x') \in I \times I \, , \, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\forall y \in J \, , \exists x \in I \, , \, f(x) = y$

Remarque : ce x est unique mais le symbole $\exists!$ n'est pas un quantificateur.



3. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, n \geq \frac{5}{\varepsilon^2} \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$$

La suite converge	FAUX ☐	Vrai ☒	
On a $u_n \leq 1$ pour n assez grand	Faux ☒	VRAI ☐	(précisez : pour $n \geq$)
On a $u_n \leq 4$ pour n assez grand	FAUX ☐	Vrai ☒	(précisez : pour $n \geq$ 5)

Justification :

Prenant $N = E\left(\frac{5}{\varepsilon^2}\right) + 1$, où E note la fonction partie entière, on a

$\forall \varepsilon > 0 \, , \exists N \, , \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$ ce qui montre que la suite converge (et vers 3).

Pour $\varepsilon = 1$, on obtient $n \geq 5 \Rightarrow |u_n - 3| < 1$ ou $n \geq 5 \Rightarrow 2 < u_n < 4$ ce qui justifie les deux dernières réponses.

4. On considère une suite convergente (v_n) extraite de la suite de terme général $u_n = \sin(\frac{3n\pi}{4})$ et on note L la limite de la suite (v_n). Donnez les valeurs possibles de L :

Il y a exactement **5** valeurs de L possibles, qui sont

-1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

Justification : La suite ne prend que 5 valeurs : $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ suivant le reste de la division de l'entier n par 8 (la fonction sinus est périodique de période 2π . Plus précisément, on a $u_{8n} = 0, u_{8n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, u_{8n+2} = -1, u_{8n+3} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; u_{8n+4} = 0, u_{8n+5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, u_{8n+6} = 1, u_{8n+7} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi il n'y a que cinq valeurs possibles pour L. Ces valeurs sont effectivement atteintes par les suites extraites $(u_{8n}), (u_{8n+1}), (u_{8n+2}), (u_{8n+5}), (u_{8n+6})$.

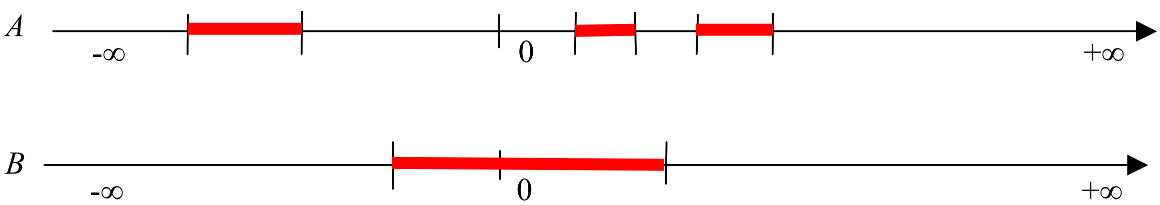
5. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbf{R}$ d'intersection non vide. Complétez les blancs par l'un des signes $=$, $\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$ de telle sorte que les formules ci-dessous soient vraies.

sup(AUB) $=$ max (sup A , sup B)

sup ($A \cap B$) $\leq$ min (sup A , sup B)

L'inégalité peut être stricte comme le montre l'exemple suivant.

Illustrez votre réponse en représentant les ensembles A et B grâce à un exemple qui vous semble significatif.



6. E désignant la fonction partie entière d'un réel, on considère les trois ensembles

$$A = \{n + E(n), n \in \mathbf{N}\} \qquad B = \{n - E(n), n \in \mathbf{Z}\} \qquad C = \{r - E(r), r \in \mathbf{Q}\}$$

L'ensemble A admet dans $\mathbf{R}$ une borne inférieure NON ☐ OUI ☒ et c'est **0**

Argument rapide :

On a $A = \{2n\,, n \in \mathbf{N}\}$ donc 0 est élément minimal de A (et donc borne inférieure).

L'ensemble A admet dans $\mathbf{R}$ une borne supérieure NON ☒ OUI ☐ et c'est

Argument rapide : quand n tend vers $+\infty$, $2n$ aussi donc A n'est pas borné.

L'ensemble B admet dans $\mathbf{R}$ une borne inférieure NON ☐ OUI ☒ et c'est **0**

Argument rapide : $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow n - E(n) = 0$ et B = { 0 }.

L'ensemble B admet dans $\mathbf{R}$ une borne supérieure NON ☐ OUI ☒ et c'est **0**

Argument rapide : B = { 0 }.

L'ensemble C admet dans $\mathbf{R}$ une borne inférieure NON ☐ OUI ☒ et c'est **0**

Argument rapide : par définition de la partie entière E $\forall r \in \mathbf{R}, 0 \leq r - E(r) < 1$ et 0 est atteint (pour tous les entiers).

L'ensemble C admet dans **R** une borne supérieure	NON ☐	OUI ☒ et c'est	1

Démonstration :

D'après la question précédente 1 est un majorant.

Pour n entier strictement positif posons $r_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a $r_n - E(r_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc 1 est le plus petit majorant.

7. Complétez

a. $\{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \lvert x+1 \rvert < 3\varepsilon\} =$	**{ -1 }**
b. $\{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \lvert x \rvert > \varepsilon\} =$	$\varnothing$
c. $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} =$	**R**

Remarque : dans les questions b. et c, ε n'est pas forcément « petit »

Si $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \lvert x \rvert > \varepsilon\} \neq \varnothing$, B contient au moins un élément b et pour $\varepsilon = |b|+1$ on a une contradiction.

De même si b est un élément de **R,** on prend $\varepsilon = |b|+1$ pour montrer que $b \in C = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\}$ et que donc $C = \mathbf{R}$.

8. Soient n un entier strictement positif et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres réels. Montrez par récurrence que l'on a l'inégalité

$$\left|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \qquad (*).$$

Montrez l'on a égalité si et seulement si les x_i sont tous négatifs ou nuls, ou tous positifs ou nuls.

Démonstration de l'inégalité :

- Le cas n = 1 est trivial.
- Le cas n = 2 est du cours (inégalité triangulaire).
- Procédons par récurrence, admettons l'inégalité (*) pour l'ordre n et montrons-la pour n+1.

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathrm{R}^{n+1}, \left|x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}\right| \begin{aligned}[t] &\leq \left|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right| + |x_{n+1}| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}| \end{aligned}$$

la première inégalité est l'inégalité triangulaire et la seconde l'hypothèse de récurrence. Cela démontre l'inégalité (*) pour l'ordre n+1 et donc pour tout n.

Démonstration du cas d'égalité

On dit que des nombres réels ont (ou 'sont de') même signe s'ils sont tous positifs ou nuls ou tous négatifs ou nuls (0 a donc à la fois le signe + et le signe -).

Si tous les x_i positifs ou nuls l'égalité est claire, s'ils sont tous négatifs ou nuls on se ramène au cas précédent en remarquant que si $x \leq 0$, $x' = -x \geq 0$ et $|\mathrm{x}| = x'$.

La démonstration de la réciproque se fait par récurrence.

- Le cas $n = 1$ est clair (il n'y a qu'un x qui a forcément un seul signe).
- Le cas $n = 2$ a été vu en cours.
- Admettons la propriété pour l'ordre n

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n$, $|x_1 + x_2 + ... + x_n| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \quad \Rightarrow$ tous les x_i sont de même signe

et montrons-la pour l'ordre n+1, supposons que pour $(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathrm{R}^{n+1}$, on ait l'égalité $A = |x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}| = C = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + |x_{n+1}|$.

Or (inégalité triangulaire) $A = |x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}| \leq B = |x_1 + x_2 + ... + x_n| + |x_{n+1}|$ et (inégalité pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n$) $B = |x_1 + x_2 + ... + x_n| + |x_{n+1}| \leq C = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + |x_{n+1}|$. On a donc $A \leq B \leq C$ et comme $A = C$ on a $A = B = C$.

On peut alors conclure : d'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre n, x_1, x_2, …, x_n ont même signe, celui de $x_1 + x_2 + ... + x_n$ et d'après le cas d'ordre 2, x_{n+1} a le signe de $x_1 + x_2 + ... + x_n$, donc de x_1, x_2, …, x_n et tous les x_i ont le même signe.

La propriété est donc vraie pour tout ordre n.