Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS 12

Mathématiques 2001-2002

Nom : **Groupe :**

Contrôle numéro 1 (durée 2 heures)

Répondre sur la feuille

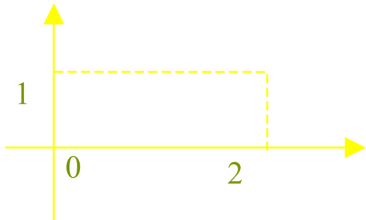
1. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A une partie de E. Cochez les bonnes réponses (on ne justifiera pas les réponses):

   On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$ Vrai ☐ Faux ☐

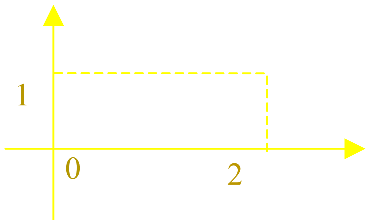
   On a toujours $A \supset f^{-1}(f(A))$ Vrai ☐ Faux ☐

2. On pose $I = [0,2]$ et $J = [0,1]$. Soit f une application $I \to J$. Traduisez en langage symbolique (avec des quantificateurs) les phrases suivantes et donnez (par son graphe) un exemple d'application $f : I \to J$ les illustrant

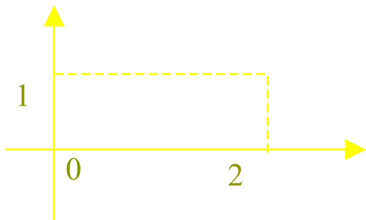
f est injective



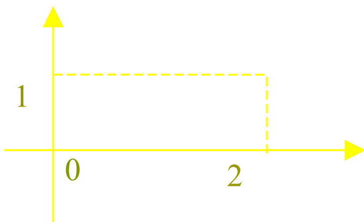
f n'est pas injective



f n'est pas surjective



f est bijective



3. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \, , n \geq \frac{5}{\varepsilon^2} \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$$

La suite converge	FAUX ☐	VRAI ☐	
On a $u_n \leq 1$ pour n assez grand	FAUX ☐	VRAI ☐	(précisez : pour $n >$)
On a $u_n \leq 4$ pour n assez grand	FAUX ☐	VRAI ☐	(précisez : pour $n >$)

4. On considère une suite convergente (v_n) extraite de la suite de terme général $u_n = \sin(\frac{3n\pi}{4})$ et on note L la limite de la suite (v_n). Donnez les valeurs possibles de L :

Il y a exactement valeurs de L possibles, qui sont

5. Soient A et B deux parties bornées de **R** d'intersection non vide. Complétez les blancs par l'un des signes $=$, $\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$ de telle sorte que les formules ci-dessous soient vraies.

sup(AUB) …… max (sup A , sup B)

sup ($A \cap B$) …… min (sup A , sup B)

Illustrez votre réponse en représentant les ensembles A et B grâce à un exemple qui vous semble significatif.

A

B

6. E désignant la fonction partie entière d'un réel, on considère les trois ensembles

$$A = \{n + E(n), n \in \mathbf{N}\} \qquad B = \{n - E(n), n \in \mathbf{Z}\} \qquad C = \{r - E(r), r \in \mathbf{Q}\}$$

L'ensemble A admet dans **R** une borne inférieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Argument rapide :

L'ensemble A admet dans $\mathbf{R}$ une borne supérieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Argument rapide :

L'ensemble B admet dans $\mathbf{R}$ une borne inférieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Argument rapide :

L'ensemble B admet dans $\mathbf{R}$ une borne supérieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Argument rapide :

L'ensemble C admet dans $\mathbf{R}$ une borne inférieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Argument rapide :

L'ensemble C admet dans $\mathbf{R}$ une borne supérieure NON ☐ OUI ☐ et c'est

Démonstration :

7. Complétez

a. $\{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, |x+1| < 3\varepsilon\} =$

b. $\{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon\} =$

c. $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} =$

8. Soient n un entier strictement positif et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres réels. Montrez par récurrence que l'on a l'inégalité

$$\left|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Montrez l'on a égalité si et seulement si les x_i sont tous négatifs ou nuls, ou tous positifs ou nuls.

Démonstrations :