

Type : Contrôle continu en amphi	Filière : MIAS 1
	MJ.Bertin MIAS 28 Mars 2000
Domaine : algèbre linéaire	
Mots-clefs : matrices, applications linéaires, valeurs propres, système d'équation, espace vectoriel de polynômes	

Énoncé complet

I) Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

II On note $\mathbf{R}_3[X]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3. Soit u l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3[X] &\rightarrow \mathbf{R}[X] \\ P &\mapsto u(P) \end{aligned}$$

tel que : $u(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
- 2) Déterminer le noyau et l'image de u .
- 3) Déterminer une base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbf{R}_3[X]$ telle que la matrice de u par rapport à cette base soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. Soit m un réel et B_m la matrice

$$B_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que si $m=1$ ou $m=-2$, alors B_m admet 0 pour valeur propre.
- 2) Trouver les valeurs propres de B_m et les espaces propres correspondants. La matrice B_m est-elle diagonalisable ?
- 3) Montrer que les valeurs propres de B_m sont $1-m$, $m-1$, $m+2$.
- 4) Quels sont les espaces propres et donner leur dimension. On traitera d'abord le cas $m \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.
- 5) Pour quelles valeurs de m , la matrice B_m est-elle diagonalisable ?