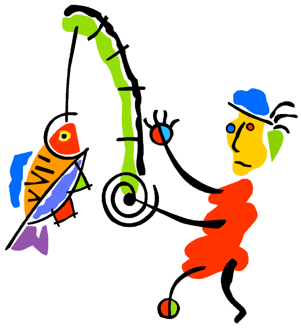
Lecture de l'énoncé de l'exercice II

- Domaine : espace vectoriel de polynômes, application linéaire
- Références dans UeL
  - module « espace vectoriel »
- Il y a une difficulté : on travaille avec un espace vectoriel de polynômes. C'est un difficulté limitée parce que les polynômes sont de degré au plus 3, il faut donc avoir le réflexe de poser $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$ et se rappeler que $\mathbf{R}_3[X]$ est de dimension 4.

Indications données par la lecture de l'énoncé (pêche à la ligne)



Question 3) la matrice M a une colonne de zéros c'est donc qu'il y a un vecteur d'image nulle plus précisément , on voit que le noyau est de dimension 1 et l'image de dimension 3 ce qui doit aider à répondre à la question 2

Résolution

On note $\mathbf{R}_3[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3. Soit u l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] &\to \mathbf{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\mapsto u(\mathrm{P}) \end{aligned}$$

tel que : $u(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

Commentaire
Qu'est-ce qu'un endomorphisme de E ?
C'est une application linéaire de E dans E. Il faut donc vérifier que u est linéaire et que u(P) est un polynôme de degré au plus 3

C'est une application linéaire car

$$\begin{aligned} u(\lambda P+Q)(X) &= (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) \\ &= \lambda\left[P(X+1)-P(X)\right]+Q(X+1)-Q(X) \\ &= \lambda u(P)(X)+u(Q)(X) \end{aligned}$$

donc $u(\lambda P+Q)=\lambda u(P)+u(Q)$

C'est une application à valeur dans E car, si P est un polynôme de degré au plus trois, il en est de même de $u(P)$.

2) Déterminer le noyau et l'image de u.

Commentaire
On rappelle les points suivants :
Le noyau d'une application linéaire u est l'ensemble des vecteurs ayant une image égale au vecteur nul. On le note Ker u , c'est un espace vectoriel.
L'image d'une application linéaire u est l'ensemble des vecteurs images par u d'un vecteur de l'espace de départ. On le note Im u , c'est un espace vectoriel.
Théorème du rang : Si l'espace de départ E est de dimension finie on a :

$$\dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = \dim E$$

Si $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$

alors : $u(P)(X) = a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d - aX^3+bX^2+cX+d$

$= a(X^3+3X^2+3X+1)+b(X^2+2X+1)+c(X+1)- aX^3+bX^2+cX+d$

$= 3aX^2+(3a+2b)X+(a+b+c)$

Par suite $u(P)$ est le polynôme nul si et seulement si $a = 3a+b = a+b+c = 0$ soit si $a = b = c = 0$.
On en déduit que le noyau de u est formé des polynômes constants, c'est donc un sous espace vectoriel de dimension 1.

D'après le théorème du rang, la dimension de Im u est donc 3. Or, d'après le calcul précédent, l'espace vectoriel image est contenu dans $\mathbf{R}_2[X]$. De plus, ces deux espaces ayant même dimension, ils sont égaux .

3) Déterminer une base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbf{R}_3[X]$ telle que la matrice de u par rapport à cette base soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La lecture de cette matrice donne $u(P_0) = 0$, $u(P_1) = P_0$, $u(P_2) = P_1$, $u(P_3) = P_2$.

Le premier vecteur de la base cherchée a une image nulle c'est donc un vecteur du noyau, donc un polynôme constant . On peut donc prendre comme premier vecteur de la base $P_0=1$.
Le second vecteur P_1 est tel que $u(P_1)=P_0$. soit, en posant, comme d'habitude,

$P_0(X) = aX^3+bX^2+cX+d,$

il vient $u(P_0)(X) = 3aX^2+(3a+2b)X+(a+b+c)=1$

donc $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$

ainsi, on peut prendre : $P_1 = X$.

Remarque : on peut écrire indifféremment : $P_1 = X$ ou $P_1 (X)= X$

Le troisième vecteur P_2 est tel que $u(P_2)=P_1$. soit, en posant, comme d'habitude,

$P_1(X) = aX^3+bX^2+cX+d,$

il vient $u(P_1)(X) = 3aX^2+(3a+2b)X+(a+b+c)=X$

donc $a = 0$;*, $b= 1/2$ et $c = -1/2$

ainsi, on a : $P_2= 1/2X^2 -1/2 X$

Enfin, le dernier vecteur P_3 est tel que $u(P_3)=P_2$. soit, en posant, comme d'habitude,

$$P_2(X) = aX^3+bX^2+cX+d,$$

il vient $u(P_2)(X) = 3aX^2+(3a+2b)X+(a+b+c)= 1/2X^2 -1/2\ X$

donc $a = 1/6$, $b = -1/2$ et $c = 1/3$

ainsi, on a : $P_3= 1/6\ X^3 -1/2X^2 +1/3\ X$.

La base cherchée est maintenant déterminée.