Contrôle continu du 16 avril 2005

Tout document interdit, téléphone portable interdit.
Machine à calculer de type collège autorisée (non graphique et non programmable)
Les quatre exercices sont totalement indépendants

Exercice 1. On considère deux nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.1 Placer les points correspondants dans le plan complexe.
1.2 Calculer le module, l'argument et le complexe conjugué de z_1 et z_2.
1.3 Calculer le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ de deux manières différentes : à partir de leur écriture en parties réelles et imaginaires, puis en utilisant les modules et arguments.
1.4 Résoudre l'équation $Z^2 = z_1$.
1.5 Calculer et représenter dans le plan complexe les nombres complexes suivants: $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, z^2, z^3, z^4. Que vaut la puissance 8 de ces nombres ?
1.6 Calculer z^n, où $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et n est un nombre entier naturel quelconque en distinguant plusieurs cas suivant la valeur de n.

Exercice 2. On considère un plan P muni d'un repère orthonormé d'origine O et constitué d'un système d'axes orthogonaux Ox et Oy portant les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Les mots « opérateur » et « transformation géométrique » sont synonymes.

I- Soit un opérateur **A,** de matrice représentative A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, agissant sur les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ de P, dont la matrice des composantes est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1- En appliquant **A** à $\overrightarrow{OM}$, calculer les composantes de l'image $\overrightarrow{OM}'$ de $\overrightarrow{OM}$ par **A**.
2- Quelle transformation géométrique reconnaissez-vous dans l'opérateur **A**?
3- Que représentent les colonnes de la matrice A ? Le vérifier.
4- Quel est l'opérateur $\mathbf{A}^{-1}$ inverse de **A** ?
5- Ecrire la matrice correspondante A^{-1}.
6- Vérifier le résultat précédent à partir du produit des matrices représentatives.

II- On applique maintenant à $\overrightarrow{OM}$ l'opérateur **B** représenté par la matrice B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Quelles sont les composantes de la nouvelle image $\overrightarrow{OM}''$ de $\overrightarrow{OM}$?
2- Quelle transformation géométrique reconnaissez-vous dans l'opérateur **B** ?

III- On applique maintenant à $\overrightarrow{OM}$ l'opérateur **A** puis l'opérateur **B** sur $\overrightarrow{OM}' = \mathbf{A}(\overrightarrow{OM})$.
On appelle **C = BA** l'opérateur produit.

1- Calculer la matrice C = BA représentative de **C** dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2- Quelles sont les composantes de l'image $\overrightarrow{OM^{(3)}}$ de $\overrightarrow{OM}$ obtenue par application de **C** ?

3- Quelle transformation géométrique reconnaissez-vous dans l'opérateur **C** ?

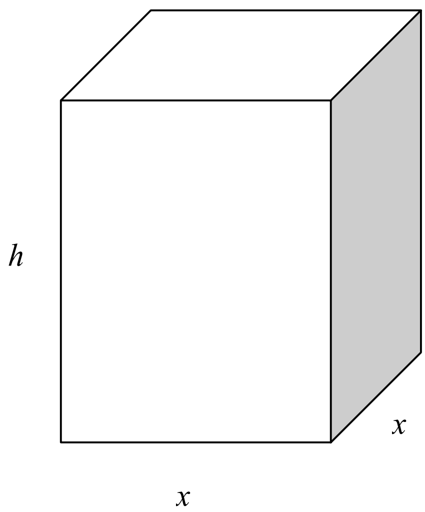
4- Faire un schéma et expliquer ce résultat graphiquement.

5- Calculer le produit de matrices AB ? Conclusion ?

Exercice 3. Résoudre le système ci-dessous par la méthode de votre choix.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère un parallélépipède rectangle de hauteur h et de section carrée de côté x. Les longueurs x et h sont exprimées en mètres ($x > 0$ et $h > 0$).



4.1. Calculer la surface totale S du parallélépipède et son volume V, en fonction de h et x.

4.2. Le volume du parallélépipède est fixé à 1 m^3. Exprimer sa hauteur h puis sa surface S en fonction de x.

4.3. On donne la fonction f, définie par $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$, pour tout x compris entre 0 et $+\infty$. Etudier et tracer cette fonction.

4.4. Pour quelle valeur de x la surface du parallélépipède est-elle minimale ? Quelle est la forme du parallélépipède dans ce cas ?