

Examen du 16 juin 2005

Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée. Tout document interdit.

Les téléphones portables doivent être éteints.

Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Rédigez les deux parties sur deux copies séparées Mathématiques

I. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

II. Soit a un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction, à valeurs réelles, d'une variable réelle non nulle, définie par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$. On désigne par G son graphe dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O .

1. On se propose de tracer le graphe G et on établit d'abord un certain nombre de propriétés de la fonction f .

1.1 f est-elle paire ou impaire ? en déduire une propriété du graphe G .

1.2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

1.3 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0^+$. Que peut-on en déduire pour G ?

1.4 Montrer que les deux seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

1.5 Montrer que la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ présente un minimum en \sqrt{a} .

1.6 Représenter sur la même figure les courbes $y = x$ et $y = x/2$ ainsi que le graphe G .

2. Soit x_0 un nombre réel strictement positif fixé. On se propose de mettre en évidence une propriété de la suite de nombres

$$u_0 = x_0$$

$$u_1 = f(x_0)$$

$$u_2 = f(f(x_0))$$

.....

2.1 Que valent u_1, u_2, \dots si $x_0 = \sqrt{a}$?

2.2 On suppose que $a = 5$ et $x_0 = 3$. Calculer les valeurs numériques de u_1, u_2, \dots avec 3 décimales. A quelle valeur est-il judicieux de stopper la série de calculs ? Comparer le résultat obtenu avec $\sqrt{5}$ calculé avec le même nombre de décimales.

2.3 En utilisant le graphe de la fonction f et en supposant $x_0 > \sqrt{a}$, proposer une interprétation au résultat obtenu en 2.2.

3. Calculer $\int_{\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}} f(x) dx$.

Statistiques

III. Un sale caractère....

C'est un fait d'Histoire que les 7 nains étaient violemment allergiques au pollen de giroflée : ils éternuaient 8 fois sur 10 en présence de cette rare substance. Blanche Neige, quant à elle, n'éternuait qu'une fois sur 10. Une nuit de printemps, la méchante Sorcière choisit une des 8 chambres de la maison des nains au hasard et y secoua un bouquet de giroflées. Une violente rafale d'éternuements réveilla tout le monde et le nain Grincheux en accusa Blanche Neige.

1. Quelle est la probabilité qu'en secouant le bouquet dans une chambre au hasard la Sorcière déclenche les éternuements, cause de la zizanie ?
2. Calculer la probabilité que ce soit Blanche Neige qui ait troublé le sommeil de la maison.
3. Calculer la probabilité que ce soit l'un des 7 nains qui ait éternué. Que pensez-vous de l'accusation de Grincheux ?

(Note : Blanche-Neige et les 7 nains dormaient chacun dans sa propre chambre).

IV. Loi normale

On considère que la variable aléatoire X , représentant le volume de bile sécrétée journalièrement par l'être humain se distribue de façon normale avec une espérance $\mu = 1$ litre par jour et un écart-type $\sigma = 0,1$ litre par jour. Quelles sont les probabilités pour que la quantité journalière de bile produite par un individu pris au hasard

1. dépasse 1,1 litre par jour ?
2. présente un écart en valeur absolue supérieur à 0,1 litre par jour par rapport à l'espérance ?
3. soit comprise entre 0,9 et 1,1 litre par jour ?

V.

Dans une usine fabriquant des tire-bouchons, la probabilité qu'un tire-bouchon soit défectueux vaut p . Chaque heure, N tire-bouchon sont produits.

Soit X le nombre de tire-bouchons défectueux produits chaque heure.

1. Quelle est la loi de X ? Que valent son espérance et sa variance ?
2. On a estimé que p vaut 0,02. D'autre part, N vaut 80. Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
3. Est-il possible d'utiliser une loi approchée ? Vérifier en calculant l'erreur commise pour $P(X=1)$.

Table de la loi normale centrée-réduite

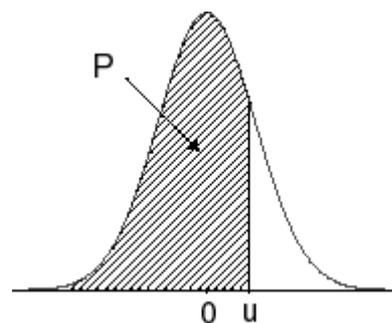
La table indique, pour $u \geq 0$, la valeur $F(u)$ de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite définie par

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Pour $u < 0$, $F(u) = 1 - F(-u)$.

La table retourne la valeur de $F(u)$ pour la valeur de u lue comme la somme des valeurs figurant en tête de la ligne et de la colonne correspondantes. Ex. :

$$u = 0,83 = 0,8 + 0,03 \rightarrow F(u) = 0,7967.$$



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9 ³ 03	0,9 ³ 06	0,9 ³ 10	0,9 ³ 13	0,9 ³ 16	0,9 ³ 18	0,9 ³ 21	0,9 ³ 24	0,9 ³ 26	0,9 ³ 29
3,2	0,9 ³ 31	0,9 ³ 34	0,9 ³ 36	0,9 ³ 38	0,9 ³ 40	0,9 ³ 42	0,9 ³ 44	0,9 ³ 46	0,9 ³ 48	0,9 ³ 50
3,3	0,9 ³ 52	0,9 ³ 53	0,9 ³ 55	0,9 ³ 57	0,9 ³ 58	0,9 ³ 60	0,9 ³ 61	0,9 ³ 62	0,9 ³ 64	0,9 ³ 65
3,4	0,9 ³ 66	0,9 ³ 68	0,9 ³ 69	0,9 ³ 70	0,9 ³ 71	0,9 ³ 72	0,9 ³ 73	0,9 ³ 74	0,9 ³ 75	0,9 ³ 76
3,5	0,9 ³ 77	0,9 ³ 78	0,9 ³ 78	0,9 ³ 79	0,9 ³ 80	0,9 ³ 81	0,9 ³ 81	0,9 ³ 82	0,9 ³ 83	0,9 ³ 83
3,6	0,9 ³ 84	0,9 ³ 85	0,9 ³ 85	0,9 ³ 86	0,9 ³ 86	0,9 ³ 87	0,9 ³ 87	0,9 ³ 88	0,9 ³ 88	0,9 ³ 89
3,7	0,9 ³ 89	0,9 ³ 90	0,9 ⁴ 00	0,9 ⁴ 04	0,9 ⁴ 08	0,9 ⁴ 12	0,9 ⁴ 15	0,9 ⁴ 18	0,9 ⁴ 22	0,9 ⁴ 25
3,8	0,9 ⁴ 28	0,9 ⁴ 31	0,9 ⁴ 33	0,9 ⁴ 36	0,9 ⁴ 38	0,9 ⁴ 41	0,9 ⁴ 43	0,9 ⁴ 46	0,9 ⁴ 48	0,9 ⁴ 50
3,9	0,9 ⁴ 52	0,9 ⁴ 54	0,9 ⁴ 56	0,9 ⁴ 58	0,9 ⁴ 59	0,9 ⁴ 61	0,9 ⁴ 63	0,9 ⁴ 64	0,9 ⁴ 66	0,9 ⁴ 67

N.B. : La notation 0,9³03, par exemple, équivaut à 0,99903.