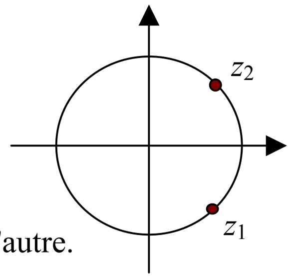
Corrigé du contrôle continu du 16 avril 2005

Exercice 1. $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

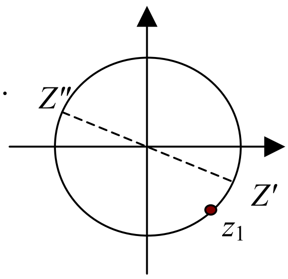
1.1



1.2 $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{+i\frac{\pi}{4}}$. Ils sont de module 1 et conjugués l'un de l'autre.

1.3 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$ et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{+i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}2} = -i$

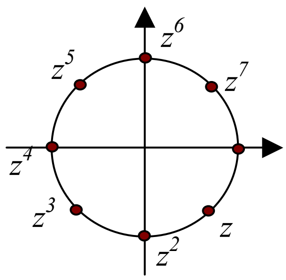
1.4 Posons $Z = \rho e^{i\theta}$, $Z^2 = \rho^2 e^{i2\theta} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. $\rho = 1$ et $2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.



Deux solutions $Z' = e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $Z'' = e^{i\frac{7\pi}{8}}$

1.5 $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}, z^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, z^3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, z^4 = e^{-i\pi}$

Pour élever ces nombres à la puissance 8, on multiplie par 8 leur argument. Tous les arguments sont alors des multiples de 2π. Donc la puissance 8 de ces nombres vaut 1.



1.6 Le résultat a été établi partiellement à la question précédente : il faut considérer les valeurs de n modulo 8.

$z^{8p} = 1, z^{1+8p} = e^{-i\frac{\pi}{4}}, z^{2+8p} = e^{-i\frac{\pi}{2}}, z^{3+8p} = e^{-i\frac{3\pi}{4}},$

$z^{4+8p} = e^{-i\pi}, z^{5+8p} = e^{-i\frac{5\pi}{4}}, z^{6+8p} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, z^{7+8p} = e^{-i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

où p est un entier.

Exercice 2.

I- 1- $\overrightarrow{OM}' \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

2- Symétrie par rapport à l'axe Ox.

3- les composantes des images des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

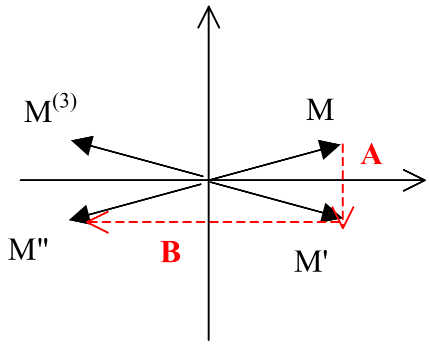
4- La symétrie est son propre inverse

5- A

6- On vérifie que le produit de A par elle-même donne la matrice identité.

II- 1- $\overrightarrow{OM}'' \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

2- Symétrie par rapport à l'axe Oy.



III- 1- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

2- $\overrightarrow{OM^{(3)}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

3- Symétrie par rapport au point O.

4- La composition des deux symétries axiales donne la symétrie par rapport au point O.

5- AB = BA, car il revient au même de composer les symétries par rapport à Ox et Oy dans un ordre ou dans l'autre.

Exercice 3. $x = \dfrac{9}{2}, y = 6, z = \dfrac{5}{2}$

Exercice 4.

4.1. $S = 2x^2 + 4hx$, $V = hx^2$.

4.2. $h = \dfrac{1}{x^2}$ et $S = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

4.3. $f'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2}$, s'annule en $x = 1$. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. f décroît à partir de 0, passe par un minimum en $x = 1$, puis croît et tend vers l'infini.

4.4. La fonction étudiée est justement l'expression de la surface du parallélépipède, donc la surface est minimum pour x = 1m. Dans ce cas h vaut 1 m aussi et le parallélépipède est donc un cube.