Examen du module LM120, Calcul matriciel

25 janvier 2005

La durée de l'examen est de deux heures. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les notes de cours et de TD sont interdites. Les calculettes, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques susceptibles de stocker ou transmettre des informations doivent être éteints et rangés hors d'atteinte.

Question de cours

Énoncer le théorème du rang et expliquer pourquoi un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est surjectif si et seulement si il est injectif.

Exercices

Exercice 1. On considère la matrice A dépendant du paramètre $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le système linéaire dépendant des deux paramètres $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + \quad + az = 1 \\ x + y + z = 0 \\ \quad -y = b \end{cases}$$

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 1$.
2. Exprimer la solution du système en fonction de a et b dans le cas $a \neq 1$.
3. Indiquez le rang de A dans le cas $a = 1$.
4. Dans le cas $a = 1$, montrer que le système est incompatible si $b \neq 1$.
5. Décrire l'ensemble des solutions du système dans le cas $a = b = 1$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_2, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Cette famille est-elle libre ? Est-elle génératrice ? On ne se contentera pas de répondre par oui ou par non (ce qui ne vaudra rien), mais on justifiera soigneusement chaque réponse.
2. Extraire de la famille $\mathcal{F}$ une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'elle engendre.

Exercice 3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On se donne une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + 3e_3, f(e_2) = -e_2 + 3e_3, f(e_3) = 3e_2 - e_3.$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer les images de vecteurs de $\mathcal{B}$ par f .
4. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. On considère les matrices dépendant des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $n > 0$ entier, exprimer la matrice A^n en fonction de a .
2. Montrer que $B^n = 0$ pour tout $n > 1$ entier.
3. Montrer que $AB = BA$.
4. Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $C^n = A^n + nA^{n-1}B$.
5. En déduire l'expression de C^n en fonction des paramètres a et b pour tout n entier.