Université Pierre et Marie Curie

Corrigé succinct de l'examen du module LM120 Calcul matriciel

Ces indications de corrections ne donnent qu'une piste possible. On pouvait traiter de nombreuses questions de plusieurs façons différentes, également valables.

Question de cours. Devant soit l'absence de réaction face à la question de cours, soit la floraison de créativité et de fantaisie qu'elle a causée, on doit rappeler qu'il est impossible de réussir en mathématiques sans apprendre le cours, savoir précisément ce que les mots que l'on emploie veulent dire et bien sûr s'en rappeler au delà de l'examen...

Exercice 1. 1. Calculons le déterminant de A. Il vient, en développant par rapport à la première ligne

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Ce déterminant s'annule si et seulement si $a = 1$, l'annulation du déterminant étant un critère de non inversibilité d'une matrice.

2. Si $a \neq 1$, on voit donc que la matrice est inversible, et le système linéaire proposé a une solution et une seule. Il s'agit en fait d'un système 2×2, puisque la dernière équation s'écrit $y = -b$, et en remplaçant dans les deux premières, on obtient

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ x + z = b \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss (même si on peut faire plus simple ici). Pour cela on réduit la matrice augmentée de ce système à la forme échelonnée réduite. Il vient

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-ab}{1-a} \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-a} \end{pmatrix},$$

d'où l'unique solution $(x,y,z) = \left(\frac{1-ab}{1-a}, -b, \frac{b-1}{1-a}\right)$.

3. On applique la méthode de Gauss à la matrice A dans le cas où $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de droite est la forme échelonnée réduite de A. On voit qu'il y a deux colonnes de pivot, le rang de A est donc égal à 2.

4. Reprenons la méthode de Gauss dans le cas $a = 1$, mais sur la matrice augmentée du système 2×2 en (x,z) (car il est inutile de faire intervenir y dans la résolution). Il vient
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}.$$
D'après le cours, ce système est incompatible si et seulement si $b - 1 \neq 0$.
5. Reprenons la méthode de Gauss dans le cas $a = b = 1$. Il vient
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il y a une position de pivot, une variable essentielle x, une variable libre z qui joue le rôle d'un paramètre, une fois qu'on l'a passée au second membre. On obtient donc la représentation paramétrique suivante de l'ensemble des solutions (en n'oubliant pas la variable $y = -1$)
$$S = \{(1-z, -1, z); z \in \mathbb{R}\} = \{(1, -1, 0) + z(-1, 0, 1); z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. 1. C'est une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Comme $4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$, elle est nécessairement liée. Par ailleurs, visiblement, $v_2 = -3v_1$ donc v_2 ne joue aucun rôle dans l'espace engendré. Il suffit donc de considérer la famille $\{v_1, v_3, v_4\}$. On forme la matrice de leurs composantes et l'on effectue encore une réduction de Gauss
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
qui est une forme échelonnée. On voit qu'il y a un pivot par ligne, donc la famille est génératrice.
2. On vient de voir que le sous-espace vectoriel engendré est $\mathbb{R}^3$ et que $\{v_1, v_3, v_4\}$ en forme une famille génératrice. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que l'on a 3 vecteurs dans cette famille, c'est une base extraite.

Exercice 3. 1. C'est la matrice formée des composantes des images des vecteurs de la base canonique dans cette même base canonique. Donc
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
(et non pas sa transposée, ou autre mélange artistique des composantes).

2. On écrit la matrice formée des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(Attention $B \neq \mathcal{B}$, une matrice et une base sont deux objets de nature différentes. Ils ne peuvent pas être égaux). En développant son déterminant par rapport à la première ligne, il vient

$$\det B = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Les vecteurs colonne de la matrice B forment donc une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Notons u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de $\mathcal{B}$. On calcule facilement $f(u_i)$ en composantes dans la base canonique à l'aide du produit matrice-vecteur. Ainsi, les composantes de $f(u_1)$ dans la base canonique sont données par

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que $f(u_1) = 2u_1$. On établit de même que $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = -4u_3$.
4. On s'aperçoit donc que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de la matrice A. Celle-ci est par conséquent diagonalisable et dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est égale à

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On pouvait aussi calculer les matrices de passage, mais c'était plus long.

Exercice 4. 1. On note que $A = aI_2$ où I_2 désigne la matrice identité 2×2. Comme A^n est le produit de A avec elle-même n fois, on voit que $A^n = a^n I_2^n$. Comme I_2 est l'élément neutre de la multiplication des matrices, on obtient finalement $A^n = a^n I_2$.
2. Remarquons d'abord que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, pour tout $n \geq 2$, nous pouvons écrire

$$B^n = B^2 B^{n-2} = 0 \times B^{n-2} = 0.$$

3. C'est un simple calcul.

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ba \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et comme $ab = ba$ dans $\mathbb{R}$...

4. On a $C = A + B$. Comme les matrices A et B commutent par **3**, la formule du binôme s'applique et l'on a

$$C^n = (A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i.$$

D'après **2**, seuls les deux premiers termes de cette somme sont non nuls : $i = 0$ et $i = 1$. On voit donc que

$$C^n = C_n^0 A^n B^0 + C_n^1 A^{n-1} B^1.$$

Or $B^0 = I_2$, $B^1 = B$, $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$ et $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

5. D'après **1** et **4**, il vient

$$C^n = a^n I_2 + na^{n-1} I_2 B = a^n I_2 + na^{n-1} B = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$ entier.

Tout cet exercice pouvait également être traité par des raisonnements par récurrence.