Examen

Question de cours
1) Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. Écrire la définition quantifiée de "f est continue au point x_0."
2) On suppose que f est continue au point x_0.
a) Montrer qu'il existe un intervalle $]\alpha,\beta[$, contenant x_0, sur lequel la fonction f est bornée.
b) La fonction f est-elle bornée sur l'intervalle $]a,b[$?
c) On suppose maintenant que la fonction f est continue sur l'intervalle $]a,b[$. Est-elle bornée sur cet intervalle ?

Question de cours
1) La définition de "f est continue au point x_0" est :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \alpha\ |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \tag{1}$$

2) a) D'après la définition précédente appliquée à $\epsilon = 1$, il existe δ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq 1$. f est donc bornée sur sur $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
b) Non. Considérant par exemple la fonction $f : x \mapsto x^{-1}$ définie sur $]0,1[$. f est continue sur $]0,1[$ mais n'est bien sûr pas bornée.
c) Non. Le contre-exemple précédent le montre.

Exercice 1 *Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, $g(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Montrer que g est une bijection.*

Corrigé 1 Montrons que g est injective.
Soit $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) = g(y)$. Supposons x pair. Alors $g(x) \geq 0$ donc $g(y) \geq 0$ donc y est pair. $x/2 = y/2$ donc $x = y$. Supposons maintenant x impair. Alors $g(x) < 0$ donc $g(y) < 0$ donc y est impair. $-(x+1)/2 = -(y+1)/2$ donc $x = y$.
Montrons que g est surjective.
Soit $z \in \mathbb{Z}$. Supposons $z \geq 0$. Alors, $2z \in \mathbb{N}$ donc $g(2z)$ est bien défini et $g(2z) = z$. Supposons $z < 0$. Alors, $-2z - 1 \in \mathbb{N}$ et $-2z - 1$ est impair donc $g(-2z-1) = -(-2z)/2 = z$.
Nous avons montré que g est bijective.

Exercice 2 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^3\theta\cos^2\theta$ en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta\ldots$ En déduire la valeur de l'intégrale :*

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

Corrigé 2 $\cos 2\theta = \Re(e^{2i\theta}) = 2\cos^2\theta - 1$ donc :

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \tag{3}$$

$\sin 3\theta = \Im(e^{3i\theta}) = \Im(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\frac{\cos 2\theta+1}{2}\sin\theta - \sin^3\theta$ d'après l'équation précédente. Donc :

$$\sin^3\theta = 3\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\sin\theta - \sin 3\theta \tag{4}$$

Finalement :

$$\sin^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}(3(\cos 2\theta + 1)\sin\theta - 2\sin 3\theta)(\cos 2\theta + 1) \tag{5}$$

$$\sin^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}(3\cos^2 2\theta\sin\theta + 3\sin\theta\cos 2\theta - 2\sin 3\theta\cos 2\theta + 3\cos 2\theta\sin\theta + 3\sin\theta - 2\sin 3\theta) \tag{6}$$

Pour calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

on va utiliser une autre expression de $\sin^3\theta\cos^2\theta$.
Remarquons d'abord que $\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$
Donc $10\cos^2\theta\sin^3\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta + \sin^5\theta - \sin 5\theta$
Par ailleurs :

$$\sin^5\theta = (1-\cos^2\theta)^2\sin\theta = \cos^4\theta\sin\theta - 2\cos^2\theta\sin\theta + \sin\theta \tag{8}$$

Donc :

$$10\cos^2\theta\sin^3\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - \sin 5\theta + \cos^4\theta\sin\theta - 2\cos^2\theta\sin\theta + \sin\theta \tag{9}$$

Nous pouvons maintenant calculer la primitive de $\sin^3\theta\cos^2\theta$.

$$10\int \sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos^5\theta + \frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{\cos^5\theta}{5} + \frac{2\cos^3\theta}{3} - \cos\theta + C \tag{10}$$

Donc :

$$10\int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^5 - \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(\frac{\sqrt{2}}{2})^5 + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{11}$$

On développe, réduit et ordonne pour obtenir :

$$I = \frac{4}{30} - \frac{7}{120}\sqrt{2} \tag{12}$$

Exercice 3 *1) On rappelle que la fonction* $\ln$ *admet un développement limité autour du point* $x_0 = 1$*, donné par* $\ln u = u + u\epsilon(u)$ *où* $\epsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$*. Que peut-on en conclure pour la convergence de la suite* $u_n = (1+\frac{1}{n})^n,\ n \geq 1$ *?*
2) Que dire de la suite $u_n = (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n, n \geq 1$ *?*

Corrigé 3 1) $u_n > 0$ pour tout n donc on peut considérer $\ln u_n$.
$\ln u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}) = n\frac{1}{n} + \alpha(n)$ avec $\alpha(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\lim \ln u_n = 1$. $x \mapsto e^x$ est continue donc $\lim u_n = e$.
2) $u_n > 0$ pour tout n donc on peut considérer $\ln u_n$.
$\ln u_n = n\ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}) = n\ln\frac{1}{2}(1+\frac{2}{n}) = n(\ln(1+\frac{2}{n}) - \ln 2) \longrightarrow -\infty$.
$x \mapsto e^x$ est continue donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 4 *On pose $I_n = \int_0^n e^{-x^2}dx$ et $J_n = \int_0^n xe^{-x^2}dx$.*
1) Montrer que la suite $(J_n)_{n\geq 0}$ est majorée. On pourra facilement calculer J_n.
2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est majorée.
3) La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

Corrigé 4 1)

$$J_n = \int_0^n xe^{-x^2}\,\mathrm{dx} = [-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^n = \frac{1}{2} - \frac{e^{-n^2}}{2} \tag{13}$$

Donc J_n est majorée par $\frac{1}{2}$
2)

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{dx} + \int_1^n e^{-x^2}\,\mathrm{dx} && (14)\\ &\leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{dx} + \int_1^n xe^{-x^2}\,\mathrm{dx} && (15)\\ &\leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{dx} + J_n \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{dx} + \frac{1}{2} && (16) \end{aligned}$$

Donc I_n est majorée.
3) $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0,\infty[$ donc I_n est une suite croissante, majorée d'après la question précédente donc convergente. Remarque : le lecteur audacieux pourra montrer que

$$\lim I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{17}$$

Exercice 5 *1) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Énoncer pour g le théorème des valeurs intermédiaires.*
2) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer :

$$\forall t \in [0, b-a]\ \exists\ x \in [a,b],\ \ f(x+t) = f(x) \tag{18}$$

Corrigé 5 1) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. L'image de $[a,b]$ par g contient $[g(a), g(b)]$.
2) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $t \in [0, b-a]$.
Soit g la fonction définie sur $[a, b-t]$ par $g(x) = f(x+t) - f(x)$.
g est continue comme composée et somme de fonctions continues.
$g(a) = f(a+t) \geq 0$ et $g(b-t) = -f(b-t) \leq 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b-t] \subset [a,b]$ tel que $g(x) = 0$.
C'est ce qu'il fallait démontrer.