Examen

à rédiger et à renvoyer à la correction

Question de cours
1) Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. Écrire la définition quantifiée de "f est continue au point x_0."
2) On suppose que f est continue au point x_0.
a) Montrer qu'il existe un intervalle $]\alpha,\beta[$, contenant x_0, sur lequel la fonction f est bornée.
b) La fonction f est-elle bornée sur l'intervalle $]a,b[$?
c) On suppose maintenant que la fonction f est continue sur l'intervalle $]a,b[$. Est-elle bornée sur cet intervalle ?

Exercice 1 *Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, $g(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Montrer que g est une bijection.*

Exercice 2 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^3\theta\cos^2\theta$ en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$... En déduire la valeur de l'intégrale :*

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta \tag{1}$$

Exercice 3 *1) On rappelle que la fonction $\ln$ admet un développement limité autour du point $x_0 = 1$, donné par $\ln u = u + u\epsilon(u)$ où $\epsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on enn conclure pour la convergence de la suite $u_n = (1+\frac{1}{n})^n,\ n \geq 1$?*
2) Que dire de la suite $u_n = (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n, n \geq 1$?

Exercice 4 *On pose $I_n = \int_0^n e^{-x^2}dx$ et $J_n = \int_0^n xe^{-x^2}dx$.*
1) Montrer que la suite $(J_n)_{n\geq 0}$ est majorée. On pourra facilement calculer J_n.
2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est majorée.
3) La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

Exercice 5 *1) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Énoncer pour g le théorème des valeurs intermédiaires.*
2) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer :

$$\forall t \in [0, b-a]\ \exists\ x \in [a,b],\ \ f(x+t) = f(x) \tag{2}$$