Examen

Question de cours : *Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.*

Théorème de Rolle Soit f une fonction continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration f est continue sur $[a,b]$ compact donc atteint un extremum en $c \in]a,b[$. Soit $f(a) = f(b) = f(c)$. Alors f est constante donc $f'(c) = 0$.
Sinon c est un extremum strict, que l'on peut supposer être un maximum sans perte de généralité (il suffit de considérer $-f$ le cas échéant). Par définition de la dérivée :

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

Pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$ car c est le maximum de f. Donc :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{2}$$

Et :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{3}$$

Ces deux limites sont égales car f est dérivable en c, donc $f'(c) = 0$.

Exercice 1

On considère la fonction de deux variables f définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$.

1) Quel est le domaine de définition D de la fonction f ?

2) Écrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1,2,3)$

Corrigé 1

1) f est définie là où $\ln(x^2)$ est défini, donc pour $x \neq 0$. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

2) En $(1,2,3)$, la fonction f est différentiable donc son plan tangent P a pour vecteur normal grad f.

$$\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1) \tag{4}$$

Donc :

$$\text{grad } f = (-2x + \frac{2}{x}, 2y, -1) \tag{5}$$

Soit en $(1,2,3)$:

$$\text{grad } f = (0,4,-1) \tag{6}$$

P a donc pour équation $4y - z = C$, où C est une constante réelle. Comme $(1,2,3)$ appartient à P, $C = 5$ et finalement :

$$P \ : \ 4y - z = 5 \tag{7}$$

Pour ceux qui ne comprendraient pas comment on trouve ainsi un vecteur normal à P, voici une démonstration élémentaire. P contient deux droites tangentes à la surface d'équation $z = f(x,y)$ et réciproquement, si l'on trouve deux droites indépendantes tangentes à cette surface, on aura trouvé P. Cherchons un vecteur tangent à la surface selon l'axe des x (donc en considérant y constant). Ce vecteur sera de la forme $v_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$. De même, un vecteur tangent à la surface selon y sera de la forme $v_y = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$. $v \in \mathbb{R}^3$ est alors dans P si et seulement si $\det(v, v_x, v_y) = 0$. On vérifie que l'on trouve bien ainsi la même équation.

Exercice 2

On considère la fonction de deux variables f définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$.

1) Calculer la dérivée de la fonction $\ln(1-x^2)$

2) Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)y' + xy = 0$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

3) Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)y' + xy = 1$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

Corrigé 2

1) $x \mapsto \ln(1-x^2)$ est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$.

2) Sur $]-1,1[$, les égalités suivantes sont équivalentes :

$$(x^2-1)y' + xy = 0 \tag{8}$$

$$y' + \tfrac{x}{x^2-1}y = 0 \tag{9}$$

La division est licite car on est sur $]-1,1[$.

$$e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y' + \frac{x}{x^2-1}e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y = 0 \tag{10}$$

La multiplication est licite car $x \mapsto e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$.

$$(e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y)' = 0 \tag{11}$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y = C, \ C \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} \tag{13}$$

Les solutions de l'équation

$$(x^2-1)y' + xy = 0 \tag{14}$$

sur $]-1,1[$ sont donc de la forme

$$y = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \ C \in \mathbb{R} \tag{15}$$

3) Sur $]-1,1[$, les égalités suivantes sont équivalentes :

$$(x^2-1)y' + xy \quad = 1 \tag{16}$$

$$y' + \tfrac{x}{x^2-1}y \quad = \frac{1}{x^2-1} \tag{17}$$

La division est licite car on est sur $]-1,1[$.

$$e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y' + \frac{x}{x^2-1}e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1} \tag{18}$$

La multiplication est licite car $x \mapsto e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$.

$$(e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y)' \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{19}$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}y \quad = \quad -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{20}$$

$$y \quad = \quad -e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}\operatorname{Arcsin}(x) + Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} \tag{21}$$

Les solutions de l'équation

$$(x^2-1)y' + xy = 1 \tag{22}$$

sur $]-1,1[$ sont donc de la forme

$$y = -\frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},\ C \in \mathbb{R} \tag{23}$$

Exercice 3

1) On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.

- **a)** Étudier les variations de la fonction ϕ.
- **b)** Quelle est l'image de l'intervalle $]0,\infty[$ par la fonction ϕ ?
- **c)** Vérifier que $2 \leq \phi''(x)$ pour $x > 0$.
- **d)** Soit $a > 1$ un nombre réel. En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (c'est-à-dire dont le reste fait intervenir une valeur de la fonction ϕ'') sur l'intervalle $[1,a]$, trouver une minoration de $\phi(a)$.

2)
- **a)** Écrire le développement limité de la fonction $\ln(1+t)$ à l'ordre 3 au point 0.
- **b)** Trouver le développement limité de la fonction ϕ à l'ordre 3 au point 0.

3) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\phi(x)} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{\phi(x)} \quad \text{si } 1 \leq x \end{cases} \tag{24}$$

On note Γ son graphe.

- **a)** Montrer que g est définie et continue sur $]0,\infty[$.
- **b)** Montrer que la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$, $]1,\infty[$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que la fonction g est croissante sur $]0, \infty[$.

d) Vérifier que la fonction g a un développement limité d'ordre 2 en 1 et écrire ce développement limité.

e) En déduire que la fonction g est dérivable au point 1 et donner l'équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 1. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.

Corrigé 3

1) On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.

a) ϕ est définie et de classe C^∞ $]0, \infty[$ de dérivée $\phi'(x) = 2x - \frac{2}{x}$.
En 0, $\phi(x) \sim -2\ln(x)$. En ∞, $\phi(x) \sim x^2$. Les variations de ϕ sont donc :

x	0		1		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$		$+$	
$\phi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

b) D'après la question précédente, l'image de $]0, \infty[$ est $[0, \infty[$.

c) Soit $x > 0$. $\phi''(x) = 2(1 + 1/x^2) > 2$.

d)

2) D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe un $x \in [1, a]$:

$$\phi(a) = \phi(1) + \phi'(1)(a-1) + \frac{\phi''(x)}{2}(a-1)^2 \tag{25}$$

$\phi(1) = \phi'(1) = 0$. D'après la question précédente, $\phi''(x) > 2$ donc :

$$\phi(a) > (a-1)^2 \tag{26}$$

a) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$.

b) Soit $x = 1 + t$.

$$\phi(x) = (1+t)^2 - 2\ln(1+t) - 1 \tag{27}$$

Donc :

$$\phi(x) = 1 + 2t + t^2 - 2t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - 1 + o(t^3) = 2t^2 - \frac{2}{3}t^3 + o(t^3) \tag{28}$$

3) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\phi(x)} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{\phi(x)} & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \tag{29}$$

On note Γ son graphe.

a) D'après la question 1.a), ϕ est positive sur $]0, \infty[$, donc $\sqrt{\phi}$ est définie et continue sur $]0, 1[$ et $]1, \infty[$. $\phi(1) = 0$ donc g est continue sur $]0, \infty[$

b) ϕ est C^∞ sur $]0, \infty[$. Donc g est dérivable là où $\phi(x)$ est strictement positif, avec éventuellement un problème de dérivabilité en 1 du fait du changement de formule de définition de ϕ. ϕ est strictement positive sur $]0, 1[$ et $]0, \infty[$, donc g est dérivable sur $]0, 1[$ et $]1, \infty[$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 1/x}{\sqrt{x^2 - 2\ln(x) - 1}} \text{ si } 0 < x < 1 \tag{30}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1/x}{\sqrt{x^2 - 2\ln(x) - 1}} \text{ si } 1 \leq x \tag{31}$$

c) $x \mapsto -\sqrt{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et ϕ est décroissante sur $]0, 1[$ donc g est croissante sur cet intervalle par composition. $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ϕ est croissante sur $]1, \infty[$ donc g est croissante sur cet intervalle par composition.

d) Soit $t > 0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\phi(1+t)} &= \sqrt{2t^2 - \tfrac{2}{3}t^3 + o(t^3)} && (32)\\
&= \sqrt{2}t(1 - \tfrac{t}{3} + o(t))^{1/2} && (33)\\
&= \sqrt{2}t(1 - \tfrac{t}{6} + o(t)) && (34)\\
&= \sqrt{2}(t - \tfrac{t^2}{6} + o(t^2)) && (35)
\end{aligned}$$

Donc g a un développement limité à l'ordre 2 en 1 à droite.
Soit maintenant $t < 0$.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\phi(1+t)} &= -\sqrt{2t^2 - \tfrac{2}{3}t^3 + o(t^3)} && (36)\\
&= \sqrt{2}t(1 - \tfrac{t}{3} + o(t))^{1/2} && (37)\\
&= \sqrt{2}t(1 - \tfrac{t}{6} + o(t)) && (38)\\
&= \sqrt{2}(t - \tfrac{t^2}{6} + o(t^2)) && (39)
\end{aligned}$$

Donc g a un développement limité à l'ordre 2 en 1 à gauche. Noter bien que $t < 0$ donc $\sqrt{t^2} = -t$.
Les deux développements limités coïncident donc g a un développement limité à l'ordre 2 en 1.

$$g(x) = \sqrt{2}(t - \frac{t^2}{6} + o(t^2)) \tag{40}$$

e) On note toujours $x = 1 + t$. Il suffit pour montrer la dérivabilité de g de montrer que

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} \tag{41}$$

existe. D'après la question précédente $g(x) \sim \sqrt{2}t$ en 1. Donc :

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} = \sqrt{2} \tag{42}$$

g est donc dérivable en 1 et l'équation de la tangente à Γ en 1 est $y = \sqrt{2}(x - 1)$.
$g(x) - \sqrt{2}(x - 1) = -\frac{t^2}{6} + o(t^2)$ donc la tangente est au-dessus de Γ en 1.