Université Pierre et Marie Curie

Unité LM110 *Session de janvier 2005*

Examen durée 2 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Merci d'éteindre téléphones portables et baladeurs.

Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté

Question de cours : Enoncer et démontrer le théorème de Rolle

Exercice 1. On considère la fonction de deux variables f définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$.

1) Quel est le domaine de définition D de la fonction f ?

2) Ecrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1,2,3)$.

Exercice 2.

1) Calculer la dérivée de la fonction $\ln(1-x^2)$.

2) Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)\,y' + x\,y = 0$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

3) Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)\,y' + x\,y = 1$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 3.

1) On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.

a) Etudier les variations de la fonction φ.

b) Quelle est l'image de l'intervalle $]0,\infty[$ par la fonction φ ?

c) Vérifier que $2 \leq \varphi''(x)$ pour $x > 0$.

d) Soit $a > 1$ un nombre réel. En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (c'est-à-dire dont le reste fait intervenir une valeur de la fonction φ'') sur l'intervalle $[1,a]$, trouver une minoration de $\varphi(a)$.

2) a) Ecrire le développement limité de la fonction $\ln(1+t)$ à l'ordre 3 au point 0.

b) Trouver le développement limité de la fonction φ à l'ordre 3 au point 1 [on pourra poser $x = 1+t$].

3) On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\varphi(x)} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{\varphi(x)} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ et on note Γ son graphe.

a) Montrer que la fonction g est définie et continue sur $]0,\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$, $]1,\infty[$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que la fonction g est croissante sur $]0,\infty[$.

d) Vérifier que la fonction g a un développement limité d'ordre 2 en 1 et écrire ce développement limité.

e) En déduire que la fonction g est dérivable au point 1 et donner l'équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 1. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.